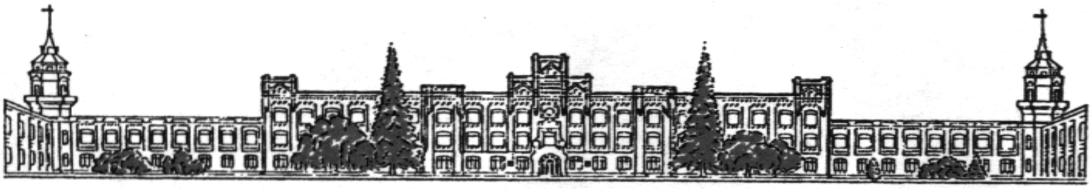


Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет України
«Київський Політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
Радіотехнічний факультет
Кафедра теоретичних основ радіотехніки

А.В. БУЛАШЕНКО

ОСНОВИ ТЕОРІЇ КІЛ. РОЗРАХУНОК ЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ ЗМІННОГО СТРУМУ. ПРАКТИКУМ

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для студентів,
які навчаються за спеціальністю 172 «Телекомунікації та радіотехніка»

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2019

Рецензент   Вишневий С. В., к-т техн., старший викладач.

За редакцією укладача

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 03 від 28.11.2019 р.) за поданням Вченої ради радіотехнічного факультету (протокол № 11/2019 від 25.11.2019 р.)

Електронне мережне навчальне видання

Булашенко А. В.

Булашенко Андрій Васильович, ст. викладач

ОСНОВИ ТЕОРІЇ КІЛ.
РОЗРАХУНОК ЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ ЗМІННОГО СТРУМУ
ПРАКТИКУМ

Основи теорії кіл. Розрахунок лінійних електричних кіл змінного струму. Практикум. [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студентів спеціальності 172 «Телекомунікації та радіотехніка» / А. В. Булашенко; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл 1.31 Мбайт). – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. – 52с.

Посібник містить приклади розв’язання задач, що виконуються на практичних заняттях кредитного модуля «Основи теорії кіл» та мають на меті одержання практичних навичок при розв’язанні задач розрахунку кіл змінного та гармонічного струму.

Посібник буде корисним студентам та викладачам, що мають на меті навчитися розв’язувати практичні задачі за даною тематикою.

Зміст

С.
Вступ 4
1. КОРОТКІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ 4
  1.1. Поняття про змінний струм 4
  1.2. Поняття про гармонічний струм.. 5
  1.3. Магнітні зв’язки 13
2. ПРИКЛАДИ РОЗВ’ЯЗАНИХ ЗАДАЧ 15
  2.1. Періодичний негармонічний струм.. 15
  2.2. Гармонічний струм та напруга 18
  2.3. Закон Ома.. 20
  2.4. Визначення елементів кола 26
  2.5. Потужність та добротність гілки... 29
  2.6. Визначення схем заміщення 33
  2.7. Метод еквівалентного генератора 35
  2.8. Розрахунок складних кіл 39
  2.9. Кола із взаємоіндукцією.. 42
  2.10. Олімпіадні задачі.. 44
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ.. 48
ДОДАТОК А.. 50
ДОДАТОК Б 51
ДОДАТОК В... 52

Вступ

Навчальний посібник (textbook) містить приклади розв'язання задач (problems), що виконуються на практичних заняттях кредитного модуля «Основи теорії кіл» (The fundamental of circuits theory) і має на меті одержання практичних навичок при розв'язанні задач щодо розрахунку кіл змінного струму.

Навчальний посібник є структурованим та містить задачі різного типу складності. Задачі, що позначені * є олімпіадними, задачі із ** взяті із Всеукраїнської олімпіади (All-Ukrainian Olympiad) за напрямом «Радіотехніка» (radio engineering), задачі із *** взяті із відкритої олімпіади із теорії кіл, що проводиться факультетом електроніки НТУУ «КПІ ім. І.Сікорського» (Igor Sikorsky KPI).

1. КОРОТКІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

1.1. Поняття про змінний струм

Змінний струм (alternating current) – струм, який змінюється у часі за величиною.

Середнє значення змінного струму

$$I_{\text{СЕР}} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} i(t)dt}{t_2 - t_1}.$$

Під діючим значенням періодичного струму (рис. 1.1) розуміють таке значення постійного струму при якому за один і той же час на опорі R виділиться одна й та ж сама енергія, а найменші проміжки часу, через які ці повторення спостерігаються – періодом T.

$$I_{\text{Д}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)\,dt}.$$

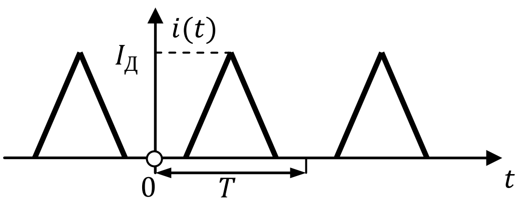


Рисунок 1.1

1.2. Поняття про гармонічний струм

Гармонічний струм (напруга) – це періодичний струм (напруга), що є гармонічною функцією часу (рис. 1.2).

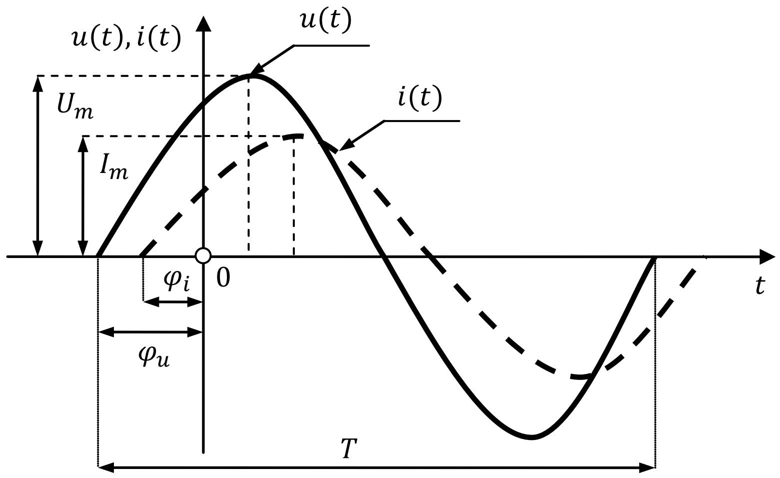


Рисунок 1.2

Залежність струму та напруги у часі:

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)\,; \quad u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u),$$

де I_m – амплітуда струму, U_m – амплітуда напруг, ω – кутова частота, φ_i – початкова фаза струму, φ_u – початкова фаза напруги.

Кутова частота обчислюється за формулою

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f.$$

Частота струму f зв'язана з періодом T залежністю $f = 1/T$.

Якщо необхідно знайти різницю фаз між двома гармонічними струмами (напругами), то користуються поняттям зсув фази:

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i.$$

Діюче значення гармонічного струму, напруги та ЕРС визначається

$$U_Д = \frac{U_m}{\sqrt{2}}, \quad I_Д = \frac{I_m}{\sqrt{2}}, \quad E_Д = \frac{E}{\sqrt{2}}.$$

Векторна діаграма (Vector diagram) – це графічне зображення змінної за гармонічним законом (синуса або косинуса) величин та співвідношень між ними за допомогою направлених відрізків – векторів (рис. 1.3).

Якщо є два гармонічні струми (рис. 1.3 б) $i_1(t) = I_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$ та $i_2(t) = I_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$, що втікають в один вузол. За першим законом Кірхгофа загальний струм визначається

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) = I_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + I_2 \cos(\omega t + \varphi_2).$$

Ці струми можна зобразити векторами на комплексній площині та додати їх за правилом паралелограма (рис. 1.3 а)

$$i(t) = I \cos(\omega t + \varphi).$$

Із діаграми бачимо, що

$$I = \sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2};$$

$$\varphi = arctg\left(\frac{b_1 + b_2}{a_1 + a_2}\right).$$

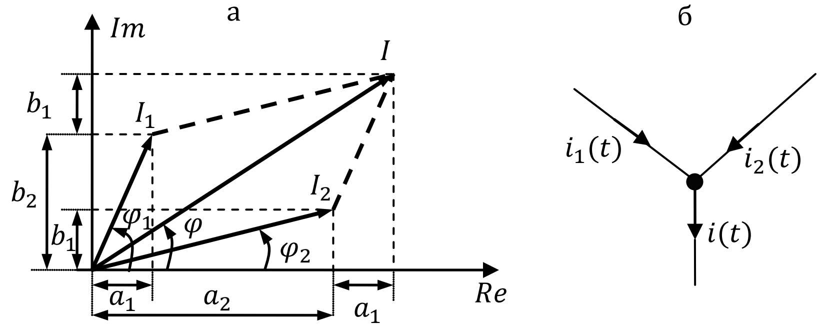


Рисунок 1.3

Індуктивність позначається L (рис. 1.4) та вимірюється у генрі (Гн).

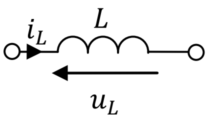


Рисунок 1.4

Індуктивність кількісно визначається відношенням потокозчеплення ψ , до струму, що створює магнітне поле

$$L = \frac{\psi}{i}.$$

У разі лінійної індуктивності напруга та струм

$$u_L = L\frac{di_L}{dt}; \quad i_L = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} u_L dt.$$

Миттєва потужність, що надходить в індуктивність

$$w_L(t) = \int_{-\infty}^{t} p(t)\,dt = \frac{Li^2}{2}.$$

Ємність визначається

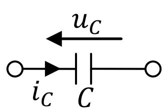


Рисунок 1.5

$$C = \frac{q}{u}.$$

Умовне зображення ємності наведене на рис. 1.5. Одиницею виміру є фарада (Ф).

У разі лінійності ємності струм та напруга

$$i_C = C\frac{du_C}{dt}; \quad u_C = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_C dt.$$

Миттєва енергія електричного поля, що накопичується на ємності

$$w_C(t) = \int_{-\infty}^{t} p(t)\,dt = \frac{Cu^2}{2}.$$

Для гармонічного струму $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi)$ визначимо напруги у колі (рис. 1.6).

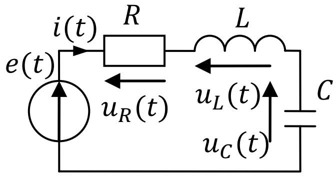


Рисунок 1.6

$$u_R(t) = i(t) \cdot R = I_m \cdot R \cos(\omega t + \varphi_i) = U_{mR} \cos(\omega t + \varphi_u),$$
$$u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} = -\omega L I_m \cdot R \sin(\omega t + \varphi_i) = U_{mL} \cos(\omega t + \varphi_i + \frac{\pi}{2})$$
$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int i(t)dt = \frac{1}{\omega C} I_m \sin(\omega t + \varphi_i) = U_{mC} \cos(\omega t + \varphi_i - \frac{\pi}{2})$$

Отже, $U_{mR} = I_m \cdot R$ – це амплітудне значення напруги на опорі; $U_{mL} = \omega L I_m = X_L I_m$ – це амплітудне значення напруги в індуктивності, а $X_L = \omega L$ – індуктивний опір (inductive resistance); $U_{mC} = I_m 1/(\omega C)$ – це амплітудне значення напруги на ємності, а $X_C = 1/(\omega C)$ – ємнісний опір (capacitive resistance).

Графічне зображення напруг та струмів на комплексній площині, що називають векторною діаграмою (рис. 1.7). На рис. 1.7 а подана векторна діаграма кола, коли $u_L > u_C$, а на рис. 1.7 б – $u_L < u_C$.

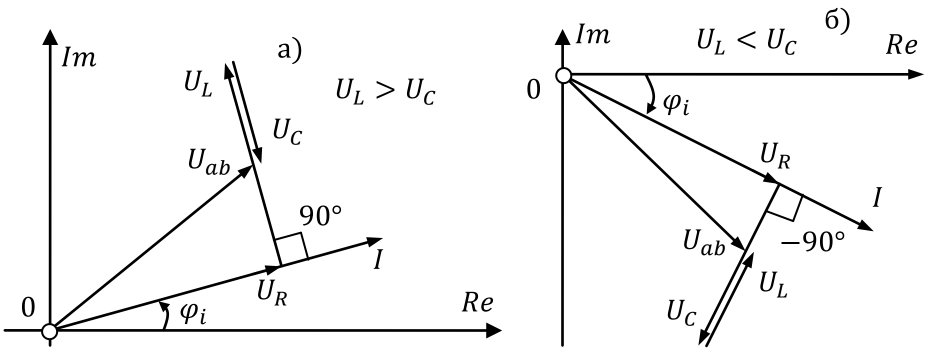


Рисунок 1.7

Комплексні індуктивний та ємнісний опори:

$$Z_L = j\omega L = jX_L = X_L e^{j90°};$$
$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -j \frac{1}{\omega C} = -jX_C = X_C e^{-j90°}.$$

Розглянемо коло, що містить паралельне з’єднання елементів (рис. 1.8), причому напруга на вході змінюється за законом $u_{ab}(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u)$.

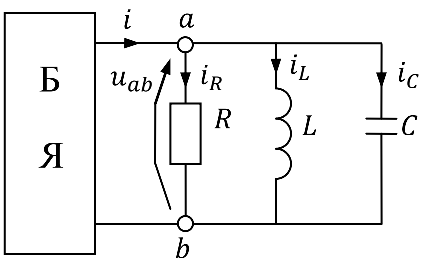


Рисунок 1.8

Комплексні індуктивна та ємнісна провідності:

$$Y_L = \frac{1}{Z_L} = \frac{1}{j\omega L} = -j\frac{1}{\omega L} = -jB_L = B_L e^{-j90°};$$

$$Y_C = \frac{1}{Z_C} = j\omega C = jB_C = B_C e^{j90°}.$$

Комплексна провідність кола

$$Y = g + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C = g + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) = g + j(b_C - b_L) = g + jb.$$

На рис. 1.9 подана геометрична інтерпретація на комплексній площині закону Ома. Коли $b_C > b_L$ реактивна провідність кола має ємнісний характер (рис. 1.9 а), а коли $b_C < b_L$ реактивна провідність кола має індуктивний характер (рис. 1.9 б).

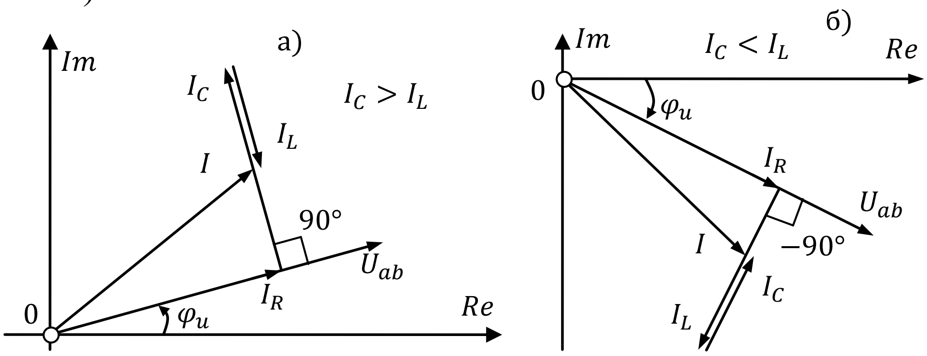


Рисунок 1.9

Еквівалентні перетворення

Для послідовного з'єднання активних та пасивних елементів (рис. 1.10 а) схему можна спростити (рис. 1.10 б) та записати еквівалентні параметри:

$$L_E = L_1 + \cdots + L_m,$$

$$\frac{1}{C_E} = \frac{1}{C_1} + \cdots + \frac{1}{C_k};$$

$$E_E = E_1 - \cdots - E_p.$$

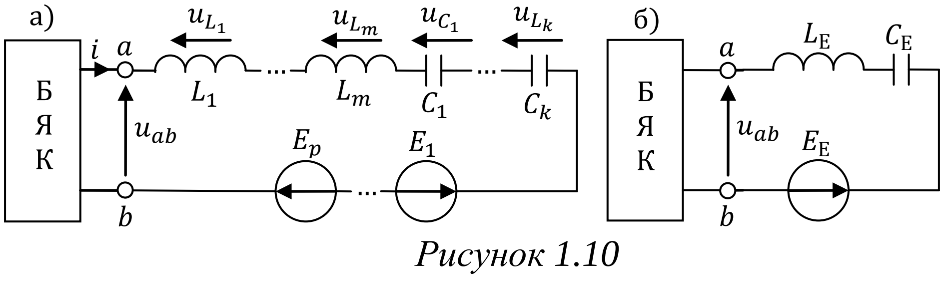


Рисунок 1.10

Для паралельного з'єднання активних та пасивних елементів (рис. 1.11 а) схему можна спростити (рис. 1.11 б).

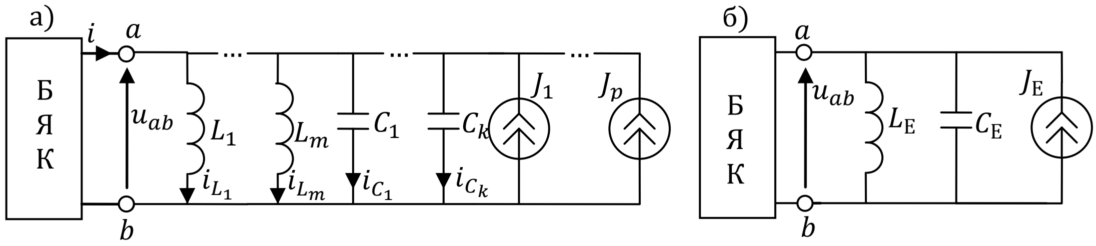


Рисунок 1.11

Еквівалентні параметри:

$$C_E = C_1 + \cdots + C_m,$$
$$\frac{1}{L_E} = \frac{1}{L_1} + \cdots + \frac{1}{L_k},$$
$$J_E = J_1 + \cdots + J_p.$$

Метод комплексних амплітуд (the method of complex amplitudes) – це метод розрахунку лінійних електричних кіл, що містять реактивні елементи в усталеному гармонічному режимі. Суть методу полягає у тому, що для всіх реактивних елементів визначається їх комплексний імпеданс, всі струми та напруги представляються комплексними амплітудами.

Продиференціюємо поточний комплекс напруги

$$\frac{d\dot{U}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[Ue^{j(\omega t+\varphi)}\right] = j\omega Ue^{j(\omega t+\varphi)} = j\omega U(t).$$

Проінтегруємо поточний комплекс

$$\int \dot{U}(t) = \int Ue^{j(\omega t+\varphi)}\,dt = \frac{U}{j\omega}e^{j(\omega t+\varphi)} = \frac{\dot{U}(t)}{j\omega}.$$

Операції диференціювання у часовій області у комплексній області відповідає множенню на $j\omega$, а операції інтегрування у часовій області у комплексній області відповідає діленням на $j\omega$.

Закон Ома (Ohm's Law) у комплексній формі

$$\dot{I}_m = \frac{\dot{U}_m}{Z(\omega)},$$

де $Z(\omega) = R + j\omega L + \frac{1}{\omega C}$.

Вираз $Z(j\omega)$ називають повним комплексним опором кола або імпедансом. Його можна переписати у вигляді $Z(j\omega) = |Z|e^{j\varphi}$.

Модуль $|Z|$ та аргумент φ комплексного опору визначаються

$$|Z| = \sqrt{R^2 + (B_L - B_C)^2}; \qquad \varphi = arctg\left(\frac{B_L - B_C}{R}\right).$$

Аналогічно вводяться поняття повної Y, активної G та реактивної B провідностей. Отже, повна провідність визначається $Y = G + jB$ та вимірюється у Сіменсах (Сім).

Імпеданс (impedance) – повний комплексний опір кола.

Адмітанс (admitans) – повна комплексна провідність кола.

Імітанс (imitans) – це узагальнене поняття імпеданса та адмітанса, з яким не пов'язані одиниці виміру.

Кондуктанс (konduktans) – це дійсна частина адмітанса, ***сусцептанс*** – це уявна частина адмітанса.

Перший закон Кірхгофа (the first law Kirchhoff):

Алгебраїчна сума комплексних амплітуд струмів (чи комплексних струмів) у вузлі дорівнює нулю

$$\sum \dot{I}_k = 0, \quad \sum \dot{I}_{mk} = 0.$$

Другий закон Кірхгофа (the second law Kirchhoff):

Алгебраїчна сума комплексних амплітуд напруг по контуру обходу дорівнює нулю

$$\sum \dot{U}_k = 0, \quad \sum \dot{U}_{mk} = 0.$$

Правила запису рівнянь залишаються такими, як і для електричних кіл постійного струму.

Про реактивні складові струму та напруги йде мова, тільки коли є проекція вектора напруги на вектор струму або навпаки.

Складову напруги, яка за фазою збігається зі струмом называтися ***активною складовою напруги***, а та складова напруги, вектор якої перпендикулярний до вектора струму, називається ***реактивною складовою напруги*** (рис. 1.12 а)

$$U_a = U\cos\varphi; \quad U_p = U\sin\varphi.$$

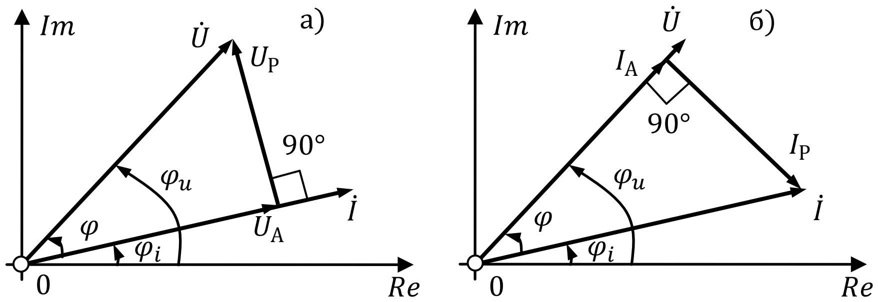


Рисунок 1.12

Аналогічно складову струму, яка за фазою збігається з напругою будемо називати ***активною складовою струму***, а ту складову струму, вектор якої перпендикулярний до вектора напруги, будемо називати ***реактивною складовою струму*** (рис. 1.12 б)

$$I_a = I\cos\varphi; \quad I_p = I\sin\varphi.$$

Повна **потужність (full power)** визначається

$$S = \frac{U_m \cdot I_m^*}{2} = \frac{U_m \cdot I_m^*}{2}\cos\varphi + j\frac{U_m \cdot I_m^*}{2}\sin\varphi = |I|^2 R + j|I|^2 X = P + jQ,$$

де $P = U_m \cdot I_m^* \cos\varphi /2$ – це активна потужність; $Q = U_m \cdot I_m^* \sin\varphi /2$ – це реактивна потужність; $I_m^* = I_m e^{-j\varphi_I}$ – спряжений комплекс струму.

Графічне зображення залежності між повною S, активною P і реактивною Q потужностями називають трикутником потужностей (рис. 1.13)

$$|S| = \sqrt{P^2 + Q^2}.$$

Коефіцієнти потужності визначаються:

$$k_P = \cos\varphi = \frac{P}{S}.$$

На комплексній площині S зображає гіпотенузу прямокутного трикутника, катетами якого є P та Q_L (рис. 1.13 а), а на рис. 1.13 б катетами є P та Q_L.

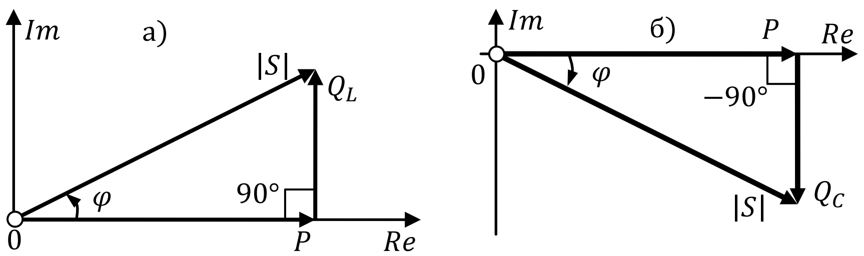


Рисунок 1.13

Комплексна потужність джерел визначається (рис. 1.14 а, б).

$$S_E = \dot{E}\dot{I}^*; \quad S_J = \dot{U}_J J^* .$$

Якщо напрямки струму та напруги співпадають, то знак перед комплексною потужністю джерела буде додатнім, а коли протилежні – від'ємним.

Комплексна потужність на комплексному опору (рис. 1.14 в)

$$S = \dot{U} \cdot \dot{I}^* = \dot{I}Z \cdot \dot{I}^* = \left|\dot{I}\right|^2 \cdot Z.$$

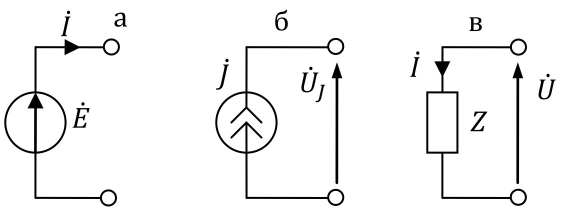


Рисунок 1.14

Закон балансу потужностей

$$\sum S_E + \sum S_J = \sum S_{СПОЖ};$$

$$\sum_{k=1}^{Ne} \dot{E}_k \dot{I}_k^* + \sum_{t=1}^{Nj} \dot{E}_t \dot{I}_t^* = \sum_{a=1}^{Na} \left|\dot{I}_a\right|^2 R_a + j\left(\sum_{b=1}^{NL} \left|\dot{I}_b\right|^2 X_{L.b} - \sum_{d=1}^{Nc} \left|\dot{I}_d\right|^2 X_{C.d}\right).$$

Добротність гілки – це відношення із точністю до коефіцієнту 2π максимальної запасеної енергії до енергії, що витрачається за період

$$Q_X = 2\pi \frac{W_{max}}{W_{RT}}.$$

Таким чином, добротність гілки (рис. 1.15) визначається

$$Q_x = \frac{Q}{P} = \frac{I^2 X}{I^2 R} = \frac{X}{R}.$$

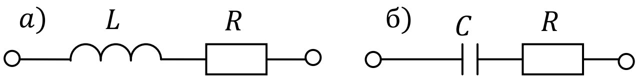


Рисунок 1.15

Передача максимальної активної потужності у навантаження

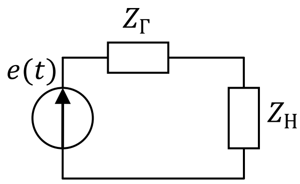


Рисунок 1.16

У колі (рис. 1.16) комплексні опори генератора $Z_Г$ та навантаження $Z_Н$:

$$Z_Г = R_Г + jx_Г, \quad Z_Н = R_Н + jx_Н.$$

На вході кола діє гармонічна напруга

$$e(t) = E_m \cos(\omega t + \varphi).$$

Умова передачі максимальної потужності у навантаженні (рис. 1.17)

$$P_{MAX} = \frac{E_Д^2}{4R_Н}, \quad Z_Н = Z_Г^* \textit{ за умови, що } Z_Н \textit{ змінне};$$

$$P_{MAX} = \frac{E_Д^2}{R_Н}, \quad X_Н = X_Г, \qquad R_Г = 0 \quad \textit{за умови, що } Z_Г \textit{ змінне}.$$

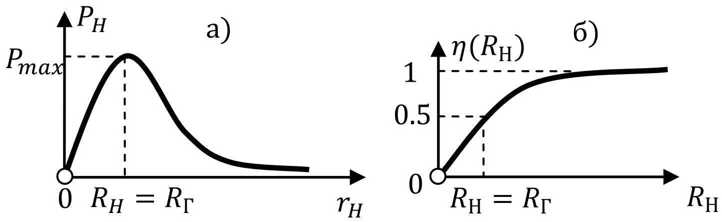


Рисунок 1.17

При цьому ККД (відношення середньої потужності, що споживається опором навантаженням до сумарної потужності, що поглинається опорами навантаженням та генератором) становить (рис. 1.17 б)

$$\eta = \frac{P_Н}{P_Н + P_Г} = \frac{I^2 R_Н}{I^2 R_Н + I^2 R_Г} = \left.\frac{R_Н}{R_Н + R_Г}\right|_{R_Н = R_Г} = 0.5.$$

1.3. Магнітні зв’язки

Кола із індуктивно зв’язаними елементами – це кола, в яких при зміні у часі струмів індуктивних елементів, що здійснюють взаємний вплив один на одного.

Для лінійних електричних кіл завжди виконується рівність

$$M_{12} = M_{21} = M.$$

Взаємна індуктивність M вимірюють у Генрі (Гн), є кількісною характеристикою явища взаємної індукції.

Коефіцієнта індуктивного зв’язку

$$k = \frac{M}{k\sqrt{L_1 L_2}},$$

де L_1 та L_2 - індуктивності котушок, між якими існує взаємоіндуктивний зв'язок.

Опір взаємоіндукції $X_M = \omega M$.

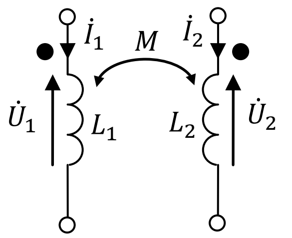


Рисунок 1.18

Узгоджене протікання струмів (рис. 1.18).
Напруга

$$u_1 = L_1\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt},$$
$$\dot{U}_1 = j\omega L_1\dot{I}_1 + j\omega M\dot{I}_2.$$

Опір $Z_{УЗ} = j(X_L + X_M)$.

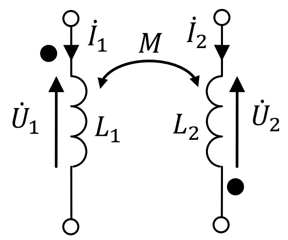


Рисунок 1.19

Неузгоджене протікання струмів (рис. 1.19).
Напруга

$$u_1 = L_1\frac{di_1}{dt} - M\frac{di_2}{dt},$$
$$\dot{U}_1 = j\omega L_1\dot{I}_1 - j\omega M\dot{I}_2.$$

Опір $Z_{НЕУЗ} = j(X_L - X_M)$.

У колі (рис. 1.20 а) за узгодженого протікання струмів магнітні зв’язки можна замінити керованими джерелами (рис. 1.20 б) або виконати розв’язку (рис. 1.20 в).

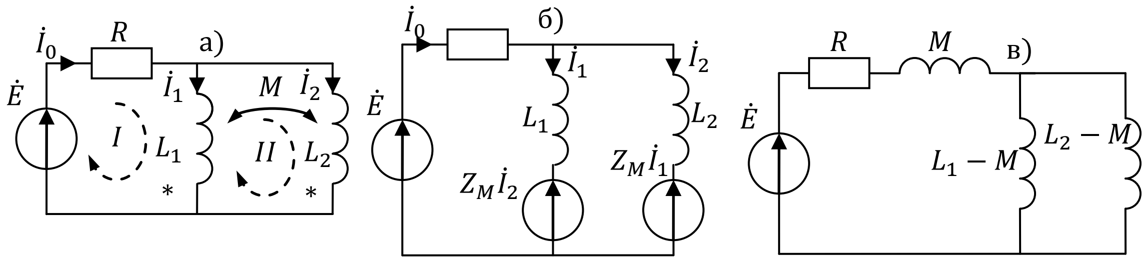


Рисунок 1.20

Знак «+» перед Z_M береться, якщо напрям обходу контуру на однойменних затискачах співпадають, у іншому випадку – знак «–».

Трансформатор – прилад, що призначений для передачі енергії із однієї частини схеми у іншу через взаємоіндукцію.

На рис. 1.21 а подана двоконтурна схема заміщення трансформатора

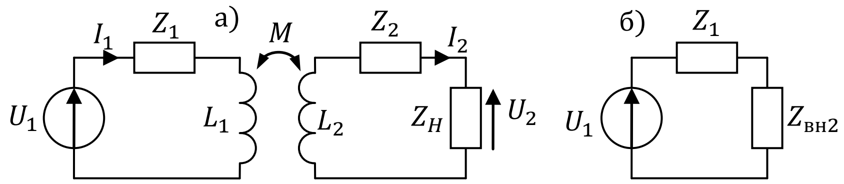


Рисунок 1.21

Коефіцієнт трансформації ідеального трансформатора (трансформатор, у якого немає втрат та немає розсіювання)

$$n = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2}.$$

Якщо $n > 1$, то трансформатор підвищуючий, та коли $n < 1$ – понижаючий.

Запишемо систему рівнянь, що описує трансформатор (рис. 1.21 а):

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = Z_1\dot{I}_1 + jx_{L1}\dot{I}_1 \pm jx_{зв}\dot{I}_2; \\ 0 = Z_2\dot{I}_2 + jx_{L2}\dot{I}_2 \pm jx_{зв}\dot{I}_1. \end{cases}$$

Двоконтурну трансформаторну схему можна звести до одноконтурної по відношенню до першого контуру (рис. 1.21 б), параметри якої визначаються

$$Z_{BH2} = \frac{x_{зв}^2}{R_2 + jx_{L2}} = \frac{x_{зв}^2}{|R_2 + jx_{L2}|^2} R_2 - j\frac{x_{зв}^2}{|R_2 + jx_{L2}|^2} x_2 = R_{BH2} + jX_{BH2},$$

де

$$R_{BH2} = \frac{x_{зв}^2}{|R_2 + jx_{L2}|^2} R_2 = \frac{x_{зв}^2}{|Z_2|^2} R_2;$$

$$X_{BH2} = -\frac{x_{зв}^2}{|R_2 + jx_{L2}|^2} x_2 = -\frac{x_{зв}^2}{|Z_2|^2} x_2.$$

2. ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАНИХ ЗАДАЧ

2.1. Періодичний негармонічний струм

Приклад 2.1. Періодична напруга $u(t)$ має вигляд прямокутних імпульсів (рис. 2.1) з тривалістю $t_1 = 3$ мкс та амплітудним значенням $U_m = 8$ В. Визначити такий період T, щоб діюче значення цієї напруги дорівнювало 4В.

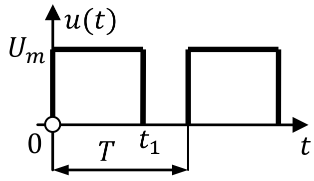


Рисунок 2.1

Розв'язання

Діюче значення негармонічної періодичної напруги визначається

$$U_Д = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^t u^2(t)dt}\,.$$

Рівняння прямокутного імпульсу напруги буде $u(t) = U_m$.
Підставимо рівняння прямої до формули діючого значення

$$U_Д = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^{t_1} u^2(t)dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^{t_1} U_m^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T}U_m^2 t\Big|_0^{t_1}} = \sqrt{\frac{1}{T}U_m^2 \cdot t_1}.$$

Звідси визначимо період

$$T = \frac{U_m^2 \cdot t_1}{U_Д^2} = \frac{8^2 \cdot 3}{4^2} = \frac{64 \cdot 3}{16} = 12 \text{ мкс}.$$

<u>Відповідь</u>: $T = 12$ мкс;

Приклад 2.2. Для негармонічного струму (рис. 2.2) визначити за якого значення періоду T діюче значення періодичного струму становить $I_Д = 3$ мА, якщо відомі $t_3 = 100$ мкс, $t_1 = 25$ мкс, $t_2 = 50$ мкс, $I_m = 6$ мА.

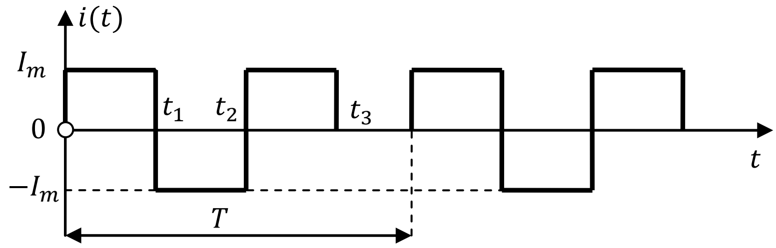


Рисунок 2.2

Розв'язання

Діюче значення негармонічного періодичного струму

$$I_Д = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)dt}.$$

Рівняння прямокутного імпульсу струму буде $i(t) = I_m$.

Підставимо рівняння прямої до формули діючого значення

$$I_Д = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\left(\int_0^{t_1} I_m^2 dt + \int_{t_1}^{t_2} I_m^2 dt + \int_{t_2}^{t_3} I_m^2 dt\right)} =$$

$$= \sqrt{\frac{I_m^2}{T}\left(\int_0^{25} dt + \int_{25}^{50} dt + \int_{50}^{100} dt\right)} = \sqrt{\frac{I_m^2}{T}(25 + 50 - 25 + 100 - 50)} =$$

$$= \sqrt{\frac{100 I_m^2}{T}} = \frac{10 I_m}{\sqrt{T}}.$$

Звідси визначимо період

$$T = \frac{100 I_m^2}{I_Д^2} = \frac{100 \cdot 36}{9} = 400 \text{ мкс}$$

Відповідь: $T = 400$ мкс.

Приклад 2.3. Визначити діюче значення заданого негармонічного періодичного струму (рис. 2.3), якщо відомі $T = 16$ мкс, $t_1 = 3$мкс, $I_m = 8$ мА.

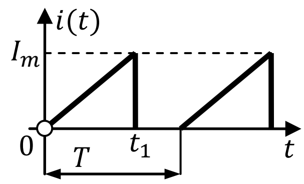


Рисунок 2.3

Розв'язання

Із аналітичної геометрії визначимо рівняння прямої

$$\frac{t-0}{t_1-0} = \frac{i(t)-0}{I_m-0}.$$

Отже, рівняння прямої струму буде

$$i(t) = \frac{I_m}{t_1}t.$$

Підставимо рівняння прямої до формули діючого значення

$$I_Д = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^{t_1} i^2(t)dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^{t_1} \frac{I_m^2}{t_1^2}t^2dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\cdot\frac{I_m^2}{t_1^2}\cdot\frac{t^3}{3}\Big|_0^{t_1}} = \sqrt{\frac{1}{T}\cdot\frac{I_m^2}{t_1^2}\cdot\frac{t_1^3}{3}} = \sqrt{\frac{I_m^2\cdot t_1}{3T}}.$$

Звідси діюче значення

$$I_Д = \sqrt{\frac{I_m^2\cdot t_1}{3T}} = \sqrt{\frac{8^2\cdot 3}{3\cdot 16}} = \frac{8}{4} = 2 \text{ мА}.$$

<u>Відповідь</u>: $I_Д = 2$ мА.

2.2. Гармонічний струм та напруга

Приклад 2.4. У колі (рис. 2.4) знайти амплітуду та початковий аргумент струму джерела струму $j(t)$. Числові значення елементів: $i_1(t) = 20\cos(\omega t)$ мА, $i_2(t) = 40\cos(\omega t + 60°)$ мА, $u_3(t) = 40\cos(\omega t - 60°)$ мА, а амперметр А показує діюче значення струму $50/\sqrt{2}$мА, опори R_1, R_2 активні.

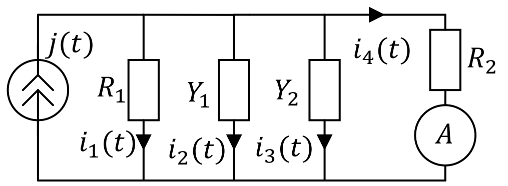


Рисунок 2.4

Розв'язання

Комплексні амплітуди струмів

$$\dot{I}_1 = 20e^{j0°} = 20;$$

$$\dot{I}_2 = 40e^{j60°} = 40(\cos 60° + j\sin 60°) = 20 + 20\sqrt{3}j;$$

$$\dot{I}_3 = 40e^{-j60°} = 40(\cos(-60°) + j\sin(-60°)) = 20 - 20\sqrt{3}j;$$

$$\dot{I}_4 = 50e^{j0°} = 50.$$

Вхідний струм за першим законом Кірхгофа

$$\dot{J} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 + \dot{I}_4 = 20 + 20 + 20\sqrt{3}j + 20 - 20\sqrt{3}j + 50 = 100 \text{ мА}.$$

Вираз струму

$$j(t) = 110\cos(\omega t) \quad \text{мА}.$$

Приклад 2.5. У колі (рис. 2.5) знайти амплітуду і початкову фазу напруги $e(t)$, якщо
$u_1(t) = 10\cos(\omega t)$ В,
$u_2(t) = 10\cos(\omega t + 60°)$ В,
$u_3(t) = 10\cos(\omega t - 60°)$ В,
$u_4(t) = 30\cos(\omega t)$ В.

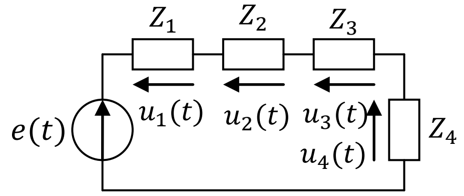


Рисунок 2.5

Розв'язання

Комплексні амплітуди напруги

$$\dot{U}_1 = 10e^{j0°} = 10;$$

$$\dot{U}_2 = 10e^{j60°} = 10(\cos 60° + j\sin 60°) = 10(\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}) = 5 + 5\sqrt{3}j;$$

$$\dot{U}_3 = 10e^{-j60°} = 10(\cos(-60°) + j\sin(-60°)) = 10(\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}) = 5 - 5\sqrt{3}j;$$

$$\dot{U}_4 = 30e^{j0°} = 30.$$

Вхідна напругу за другим законом Кірхгофа

$$\dot{E} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 + \dot{U}_3 + \dot{U}_4 = 10 + 5 + 5\sqrt{3}j + 5 - 5\sqrt{3}j + 30 = 50 \text{ В}.$$

Вираз напруги

$$e(t) = 50\cos(\omega t).$$

Приклад 2.6. Коло (рис. 2.6) працює в усталеному гармонічному режимі на частоті ω. На цій частоті $X_{L2} = X_{C1} = 10$Ом. Показання вольтметрів $V_1 = 3$В, $V_2 = 12$В, $V_3 = 15$В. Визначити показання вольтметра V.

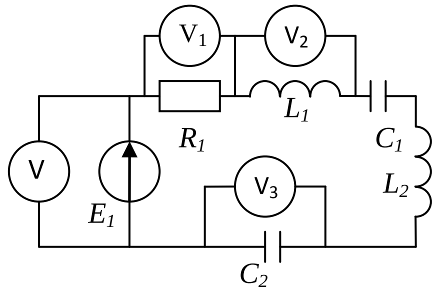


Рисунок 2.6

Розв'язання

Комплексні опори індуктивності та ємності

$$Z_{C1} = -jX_{C1} = -j10\ \text{Ом};\ Z_{L2} = jX_{L2} = j10\ \text{Ом}.$$

Визначимо суму цих опорів $Z_{C1} + Z_{L2} = -10j + 10j = 0$.

Опори Z_{C1} та Z_{L2} компенсують один одного, а струм, що протікає через них однаковий, а отже напруга буде однаковою, але різна за величиною, тобто вони компенсують одна дону. Отже показання вольтметру визначимо із трикутника напруг (рис. 2.7)

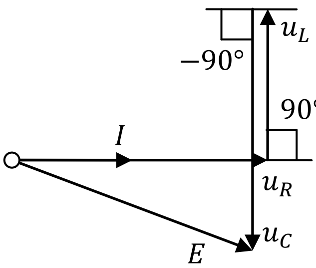


Рисунок 2.7

$$u_V = \sqrt{u_{V1}^2 + (u_{V2} - u_{V3})^2} = \sqrt{3^2 + (12 - 15)^2} = 3\sqrt{2}\ \text{В}.$$

Приклад 2.7. У колі (рис. 2.8) в усталеному гармонічному режимі на частоті ω визначити показання амперметра A. На цій частоті $X_{L2} = X_{C2} = 2$ кОм. Показання амперметрів: $A_1 = 4$ мА, $A_2 = 8$ мА, $A_3 = 4$ мА.

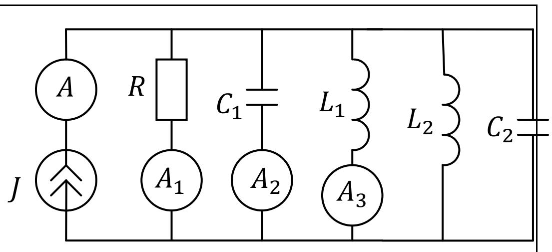


Рисунок 2.8

Розв'язання

Повні провідності індуктивності та ємності

$$Y_{L2} = \frac{1}{jX_{L2}} = \frac{1}{2j} = -j0{,}5\ \text{Сім};$$

$$Y_{C2} = \frac{1}{-jX_{C2}} = \frac{1}{-2j} = j0{,}5\ \text{Сім}.$$

Визначимо суму цих провідностей

$$Y_{C2} + Y_{L2} = -0{,}5j + 0{,}5j = 0.$$

Провідності Y_{C2} та Y_{L2} компенсують одна одну. Отже показання вольтметру визначимо із трикутника напруг (рис. 2.9)

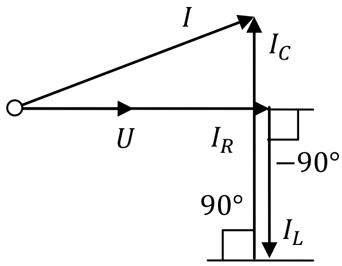


Рисунок 2.9

$$I_A = \sqrt{I_R^2 + (I_{C1} - I_{L1})^2} = \sqrt{A_1^2 + (A_2 - A_3)^2} = \sqrt{3^2 + (8 - 4)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5\ \text{мА}.$$

2.3. Закон Ома

Приклад 2.8. У колі (рис. 2.10) визначити вираз струму $i(t)$. Відомо, що числові значення елементів кола на частоті ω: $R_1 = 1$ кОм, $X_1 = 9$ кОм, $R_2 = 2$ кОм, $X_2 = 6$ кОм, $e(t) = 6\sqrt{2}\cos(\omega t + 50°)$ В. Побудувати векторну діаграму струмів та напруг.

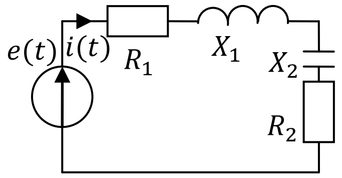


Рисунок 2.10

Розв'язання

Розрахунки будемо здійснювати у одиницях: опори – кОм, струм – мА, напруга – В.

Комплексні опори індуктивності та ємності

$$Z_L = j\omega L = jX_L = jX_1;\ \ Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{\omega C} = -jX_C = -jX_2.$$

Еквівалентний опір кола (рис. 2.9 а)

$$Z = R_1 + R_2 + jX_1 - jX_2 = 1 + 2 + 9j - 6j = 3 + 3j = 3\sqrt{2}e^{45°j}.$$

Комплексна амплітуда напруги

$$\dot{E} = 6\sqrt{2}e^{50°j}, \text{В}.$$

Закон Ома для комплексних амплітуд

$$\dot{I} = \frac{\dot{E}}{Z} = \frac{6\sqrt{2}e^{50°j}}{3\sqrt{2}e^{45°j}} = 2e^{5°j}$$

Вираз струму

$$i(t) = 2\cos(\omega t + 5°) \text{ мА}.$$

Якісно побудуємо векторну діаграму струмів та напруг (рис. 2.11).

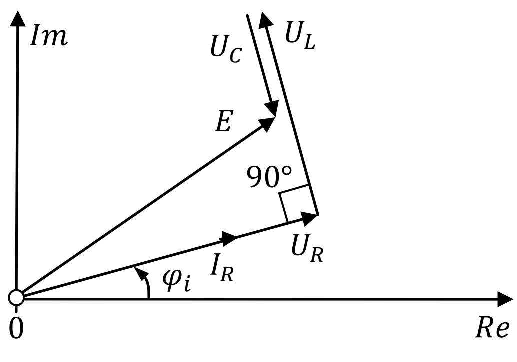
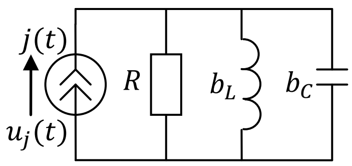


Рисунок 2.11

<u>Відповідь</u>: $i(t) = 2\cos(\omega t + 5°)$ мА;

Приклад 2.9. У колі (рис. 2.12) визначити вираз струму $j(t)$. Відомо, що числові значення елементів кола на частоті ω : $R = 0.25$ кОм, $b_L = 6$ мСім, $b_C = 10$ мСім, $u_j(t) = 3\sqrt{2}\cos(\omega t - 10°)$ В. Побудувати векторну діаграму струмів та напруг.	 *Рисунок 2.12*

Розв'язання

Розрахунки будемо здійснювати у одиницях: провідності – мСім, струм – мА, напруга – В.

Комплексні ємнісна та індуктивна провідності

$$Y_C = jb_C = 10j \text{ мСім}; \; Y_L = -jb_L = -6j \text{ мСім}.$$

Еквівалентна провідність кола (рис. 2.9 б)

$$Y = g + jb_C - jb_L = 4 + 10j - 6j = 4 + 4j = 4\sqrt{2}e^{45°j}.$$

Комплексна амплітуда напруги

$$\dot{U}_J = 3\sqrt{2}e^{-10°j}, \text{В}.$$

Закон Ома для комплексних амплітуд

$$\dot{J} = \dot{U}_J \cdot Y = 3\sqrt{2}e^{-10°j} \cdot 4\sqrt{2}e^{45°j} = 24e^{35°j}$$

Вираз струму

$$j(t) = 24\cos(\omega t + 35°) \text{ мА}.$$

Якісно побудуємо векторну діаграму струмів та напруг (рис. 2.13).

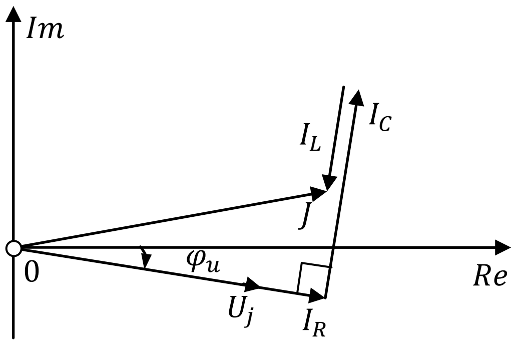


Рисунок 2.13

.

<u>Відповідь</u>: $j(t) = 24\cos(\omega t + 35°)$ мА.

Приклад 2.10. У колі (рис. 2.14) у гармонічному режимі на частоті $\omega = 10^6$ рад/с визначити показання амперметру та амплітуду напруги $e(t)$. Відомо, що амплітуди струмів у опорі 3мА та ємності 4мА, $L = 2$мГн, $R = 2$кОм.

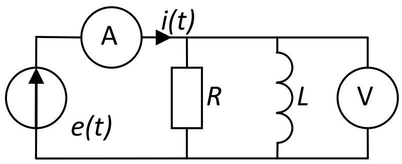


Рисунок 2.14

Розв'язання

Розрахунки будемо здійснювати у одиницях: індуктивність – мГн, ємність – нФ, опір – кОм, провідність – мСім, частота – рад/мкс.

Комплексна індуктивна провідність

$$Y_L = \frac{1}{j\omega L} = \frac{1}{j \cdot 2 \cdot 1} = -0.5j \text{ мСім.}$$

Загальна провідність кола

$$Y_{\text{ЗАГ}} = g + Y_C = 0.5 - 0.5j = 0.5\sqrt{2}e^{-j45^\circ}.$$

Із векторної діаграми струмів (рис. 2.15) бачимо, що

$$I_A = \sqrt{I_R^2 + I_L^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ мА.}$$

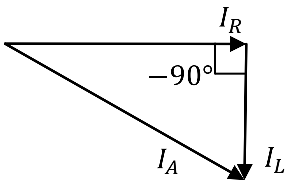


Рисунок 2.15

Отже, амперметр показує

$$I_Д = \frac{5}{\sqrt{2}} = 2.5\sqrt{2} \text{ мА.}$$

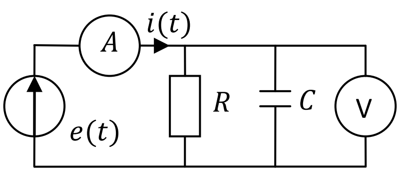
Амплітуда напруги у джерелі за законом Ома

$$E_m = \frac{I_A}{|Y_{\text{ЗАГ}}|} = \frac{5}{0.5\sqrt{2}} = 5\sqrt{2} \text{ В.}$$

Отже, вольтметр показує

$$U_Д = \frac{E_m}{\sqrt{2}} = 5 \text{ В.}$$

<u>Відповідь</u>: $I_A = 2.5\sqrt{2}$ мА, $E_m = 5\sqrt{2}$ В, $U_Д = 5$ В.

Приклад 2.11. У колі (рис. 2.16) у гармонічному режимі на частоті $\omega = 10^6$ рад/с визначити показання амперметру, вольтметру та амплітуду напруги джерела $e(t)$. Відомо, що амплітуди струмів у опорі 6мА та ємності 8мА, $C = 1$ нФ, $R = 1$кОм.	 *Рисунок 2.16*

Розв'язання

Розрахунки будемо здійснювати у одиницях: ємність – нФ, опір – кОм, провідність – мСім, частота – рад/мкс.

Комплексна ємнісна провідність

$$Y_C = j\omega C = j \cdot 1 \cdot 1 = j, \text{ мСім.}$$

Загальна провідність кола

$$Y_{\text{ЗАГ}} = g + Y_C = 1 + j = \sqrt{2}e^{-j45°}.$$

Із векторної діаграми струмів (рис. 2.17) бачимо, що

$$I_A = \sqrt{I_R^2 + I_C^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \text{ мА.}$$

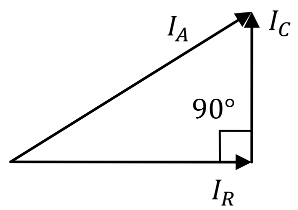


Рисунок 2.17

Отже, амперметр показує

$$I_{\text{Д}} = \frac{10}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2} \text{ мА.}$$

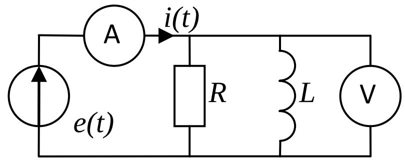
Амплітуда напруги у джерелі

$$E_m = \frac{I_A}{|Y_{\text{ЗАГ}}|} = \frac{10}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2} \text{ В.}$$

Отже, вольтметр показує

$$U_{\text{Д}} = \frac{E_m}{\sqrt{2}} = 5 \text{ В.}$$

<u>Відповідь</u>: $I_A = 5\sqrt{2}$ мА, $E_m = 5\sqrt{2}$ В, $U_{\text{Д}} = 5$ В.

Приклад 2.12. У колі (рис. 2.18) на частоті $\omega = 10^6$ рад/с знайти напругу $e(t)$ та показання вольтметру. Числові параметри елементів кола $i(t) = 8\sqrt{2}\cos(\omega t - 30°)$ мА, $L = 1$ мГн, $R =$ 1кОм.	 *Рисунок 2.18*

Розв'язання

Розрахунки будемо здійснювати у одиницях: індуктивність – мГн, опір – кОм, провідність – мСім, частота – рад/мкс.

Комплексна індуктивна провідність

$$Y_L = \frac{1}{j\omega L} = \frac{1}{j \cdot 1 \cdot 1} = -j \text{ мСім.}$$

Загальна провідність паралельних елементів

$$Y_{\text{ЗАГ}} = g + Y_L = 1 - j = \sqrt{2}e^{-j45°}.$$

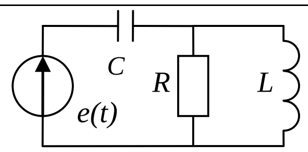
Комплексна амплітуда струму $\dot{I} = 8\sqrt{2} \cdot e^{-j30°}$.

Закон Ома

$$\dot{E} = \frac{\dot{I}}{Y_{\text{ЗАГ}}} = \frac{8\sqrt{2}e^{-j30°}}{\sqrt{2}e^{-j45°}} = 8e^{j15°}$$

Отже вольтметр показує $E_{\text{Д}} = 8/\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$ В.

Гармонічна напруга $e(t) = 8 \cdot \cos(\omega t + 15°)$ В.

Приклад 2.13. Знайти вхідний опір кола (рис. 2.19) на частоті $\omega = 10^6$ рад/с. Яка буде початкова фаза вхідного струму? Напруга джерела $e(t) = E_m \cos(\omega t + 20°)$В. Числові значення: $L=2$мГн, $C=0.5$ нФ, $R=2$кОм.	 *Рисунок 2.19*

Розв'язання

Розрахунки будемо здійснювати у одиницях: індуктивність – мГн, ємність – нФ, опір – кОм, частота – рад/мкс.

Комплексний ємнісний опір

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j \cdot 1 \cdot 0.5} = -2j \text{ кОм;} \quad Z_L = j\omega L = j1 \cdot 2 = 2j \text{ кОм.}$$

Загальний опір паралельних гілок

$$Z = \frac{R \cdot Z_L}{R + Z_L} = \frac{2 \cdot 2j}{2 + 2j} = \frac{2j}{1 + j} = \frac{2e^{j90°}}{2\sqrt{2}e^{j45°}} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{j45°} = 1 + j.$$

Загальний опір кола $Z_{\text{ЗАГ}} = Z + Z_C = 1 + j - 2j = 1 - j = \sqrt{2}e^{-j45°}$ кОм.

Комплексна амплітуда вхідної напруги $\dot{E} = E_m e^{j\varphi_e} = E_m e^{j100°}$.

За законом Ома

$$\dot{I} = \frac{\dot{E}}{Z} = \frac{E_m e^{j100°}}{\sqrt{2}e^{-j45°}} = \frac{E_m}{\sqrt{2}}e^{j145°}.$$

Отже початкова фаза $\varphi_i = 145°$.

<u>Відповідь</u>: $\varphi_i = 145°$.

Приклад 2.14. У колі (рис. 2.20) в усталеному гармонічному режимі визначити повний вхідний опір та повну вхідну провідність, визначити струм I_C. Абсолютні значення опорів всіх елементів на деякій частоті становлять 10 кОм, $I_R = I_L = 5$ мА.

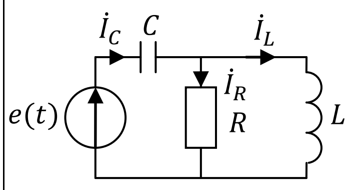


Рисунок 2.20

Розв'язання

Повний вхідний опір кола

$$Z_{BX} = Z_C + \frac{R \cdot Z_L}{R + Z_L} = -jX_C + \frac{R \cdot jX_L}{R + jX_L} = -j10 + \frac{10 \cdot j10}{10 + j10} = -j10 + \frac{j10}{1 + j}$$

$$= -j10 + \frac{10e^{j90°}}{\sqrt{2}e^{45°}} = -j10 + 5\sqrt{2}e^{j45°} = 5 - 5j = 5\sqrt{2}e^{-j45°} \text{ кОм.}$$

Повна вхідна провідність

$$Y_{BX} = \frac{1}{Z_{BX}} = \frac{1}{5\sqrt{2}e^{-j45°}} = \frac{e^{j45°}}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{5\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0.1 + 0.1j \text{ мСім.}$$

Якісна векторна діаграма струмів подана на рис. 2.21.

Звідси визначимо струм

$$I_C = \sqrt{I_R^2 + I_L^2} = \sqrt{5^2 + 5^2} = 5\sqrt{2} \text{ мА.}$$

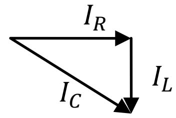


Рисунок 2.21

Приклад 2.15. У колі (рис. 2.21) в усталеному гармонічному режимі визначити гармонічні напруги на реактивностях: $u_L(t)$ та $u_C(t)$. Опори елементів нанесені на схемі в кОм. Джерело струму має вираз $j(t) = 10\cos(\omega t - 80°)$ мА.

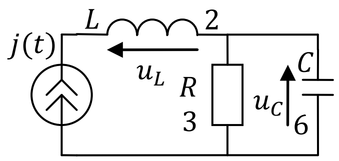


Рисунок 2.21

Розв'язання

Розрахунки будемо здійснювати у одиницях: опір – кОм, напруга – В.

Комплексні індуктивні та ємнісний опори

$$Z_L = jX_L = j2 = 2e^{j90°};\ Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -jX_C = -j6 = 6e^{-j90°}.$$

За формулою дільника струму

$$\dot{I}_C = \frac{\dot{J} \cdot R}{R + Z_C} = \frac{10e^{-j80°} \cdot 3}{3 - 6j} = \frac{10e^{-j80°}}{1 - 2j} = \frac{10e^{-j80°}}{\sqrt{5}e^{-j63.5°}} = 2\sqrt{5}e^{-j16.5°}.$$

За законом Ома

$$\dot{U}_L = \dot{J} \cdot Z_L = 10e^{-j80°} \cdot 2e^{j90°} = 20e^{j10°}$$

$$\dot{U}_C = \dot{I}_C \cdot Z_C = 2\sqrt{5}e^{-j16.5°} \cdot 6e^{-j90°} = 12\sqrt{5}e^{-j106.5°}$$

Гармонічні напруги

$$u_L(t) = 20\cos(\omega t + 10°) \text{ В;}$$

$$u_C(t) = 12\sqrt{5}\cos(\omega t - 106.5°) \text{ В.}$$

Відповідь: $u_L(t) = 20\cos(\omega t + 10°)$ В, $u_C(t) = 12\sqrt{5}\cos(\omega t - 106.5°)$ В.

2.4. Визначення елементів кола

Приклад 2.16. Визначити індуктивність котушки, вважаючи, що її активний опір від частоти не залежить. Котушка індуктивності вмикається спочатку до джерела постійної напруги 24В, а потім до джерела гармонічної напруги 20 В з частотою 50 Гц. У першому випадку амперметр, підключений до котушки, показав струм 6 А, а у другому – 4 А. В умові наведені діючі значення струму та напруги.

Розв'язання

Схема заміщення котушки індуктивності зображена на рис. 2.22 а.

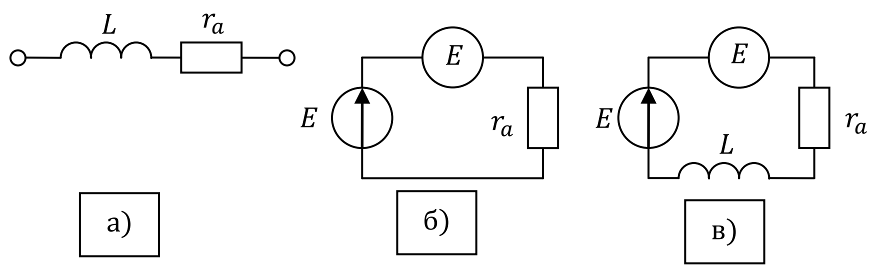


Рисунок 2.22

Розглянемо ввімкнення котушки індуктивності до джерела постійної напруги $E = 24$ В (рис. 2.22 б). Індуктивність L катушки індуктивності на постійному струмі еквівалентна «закоротці» у місці її включення. Таким чином, за законом Ома визначимо активний опір котушки

$$r_a = \frac{E}{I_{A1}} = \frac{24}{6} = 4\ \text{Ом}.$$

Розглянемо ввімкнення котушки індуктивності до джерела гармонічної напруги $E = 20$ В із частотою $f = 50$ Гц (рис. 2.22 в).

Модуль повного опору

$$|Z| = \frac{E}{I_{A2}} = \frac{20}{4} = 5\ \text{Ом}.$$

З іншого боку повний опір котушки індуктивності

$$Z = r_a + jX_L = \sqrt{r_a^2 + X_L^2}e^{j\varphi}.$$

Звідки запишемо $|Z| = \sqrt{r_a^2 + X_L^2}$. Тепер визначим опір індуuктивності

$$X_L = \sqrt{|Z|^2 - r_a^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3\ \text{Ом}.$$

Індуктивний опір

$$X_L = \omega L.$$

Звідси визначимо

$$L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{X_L}{2\pi f} = \frac{3}{2\pi \cdot 50} = 9.5 \cdot 10^{-3}\text{Гн} = 9.5\ \text{мГн}.$$

Відповідь: $L = 9.5$ мГн.

Приклад 2.17. У колі (рис. 2.23) знайти значення ємності C та показання третього вольтметру E. Показання інших двох вольтметрів: $U_R = 24$ В, $U_C = 16$ В. Числові значення $R = 6$ кОм, $f = 50$ Гц.

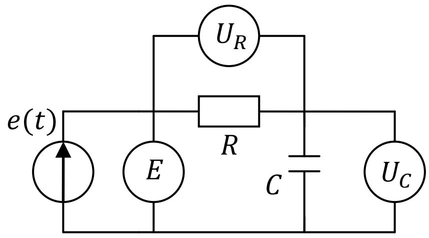


Рисунок 2.23

Розв'язання

Модуль струму у колі

$$|I| = \frac{U_R}{R} = \frac{24}{6} = 4 \text{ мА}.$$

Із закону Ома визначимо реактивний ємнісний опір

$$X_C = \frac{U_C}{|I|} = \frac{16}{4} = 4 \text{ кОм}.$$

З іншого боку ємнісний опір

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C}.$$

Звідси визначимо величину ємності

$$C = \frac{1}{2\pi f \cdot X_C} = \frac{1}{2\pi \cdot 50 \cdot 4 \cdot 10^3} \cong 80 \cdot 10^{-9} \Phi = 80 \text{ нФ}.$$

Із трикутника напруг (рис. 2.24) визначимо

$$E = \sqrt{U_R^2 + U_C^2} = \sqrt{24^2 + 16^2} = 28.8 \text{ В}.$$

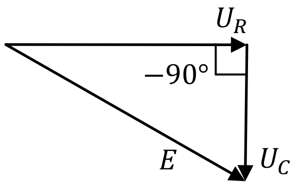


Рисунок 2.24

Відповідь: $C = 80$ нФ, $E = 28.8$ В.

Приклад 2.18. У колі (рис. 2.25) в усталеному гармонічному режимі визначити Z_L . Абсолютні значення опорів $|Z_{\text{C}}| = R = 7$ кОм, фаза вхідного опору $\varphi_{Z_{\text{ВХ}}} = 0°$.

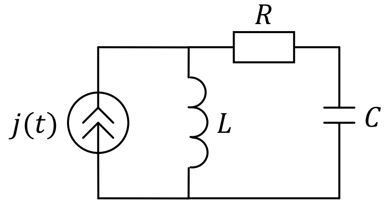


Рисунок 2.25

Розв'язання

Вхідний опір кола

$$Z_{\text{ВХ}} = \frac{jX_L(R - jX_C)}{jX_L + R - jX_C} = \frac{X_L e^{j90°} 7\sqrt{2} e^{-j45°}}{7 + j(X_L - 7)} = \frac{7\sqrt{2} \cdot X_L e^{j45°}}{\sqrt{7^2 + (X_L - 7)^2} \cdot e^{jarctg\left(\frac{X_L - 8}{8}\right)}}.$$

Розглянемо окремо фазу

$$\varphi_{Z_{\text{ВХ}}} = 45° - arctg\left(\frac{X_L - 7}{7}\right) = 0.$$

Звідси визначимо

$$(X_L - 7)/7 = tg(45°) = 1.$$

Отже, $X_L - 7 = 7$, тоді $X_L = 14$ кОм, звідси $Z_L = 14j$ кОм.

Відповідь: $Z_L = 14j$ кОм.

Приклад 2.19. У колі (рис. 2.26) усталений гармонічний режимі визначити активну провідність $G = 1/R$ та аргумент вхідної провідності $\varphi_{Y_{\text{ВХ}}}$. Абсолютні значення провідностей $|Y_L| = |Y_C| = G$, модуль вхідної провідності $|Y_{\text{ВХ}}| = 2$ мСім. Визначити G та $\varphi_{Y_{\text{ВХ}}}$.

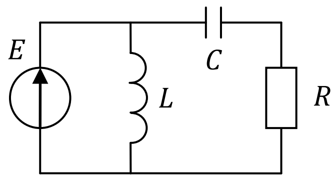


Рисунок 2.26

Розв'язання

Загальна провідність кола

$$Y_{\text{ВХ}} = Y_L + \frac{Y_C \cdot G}{Y_C + G} = -jB_L + \frac{jB_C \cdot G}{jB_C + G} = -jB + \frac{jB \cdot B}{jB + B} = -jB + \frac{jB}{j + 1} =$$

$$= -jB + \frac{Be^{j90°}}{\sqrt{2}e^{j45°}} = -jB + \frac{B}{\sqrt{2}} e^{j45°} = -jB + \frac{B}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$$

$$= -jB + \frac{B}{2} + j\frac{B}{2} = \frac{B}{2} + j\frac{B}{2}.$$

Модуль вхідної провідності

$$|Y_{\text{ВХ}}| = \sqrt{\frac{B^2}{4} + \frac{B^2}{4}} = \sqrt{\frac{2B^2}{4}} = \frac{B}{2}\sqrt{2} = \frac{B}{\sqrt{2}}.$$

За умовою задачі $B/\sqrt{2} = 2$, звідси $G = B = 2\sqrt{2}$ кОм.

Вхідна провідність кола

$$Y_{\text{ВХ}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} + j\frac{2\sqrt{2}}{2} = 2e^{j45°} = 2 \cdot e^{j45°}.$$

Відповідь: $G = 2\sqrt{2}$ мСім, $\varphi_{\text{ВХ}} = -45°$.

2.5. Потужність та добротність гілки

Приклад 2.20. На вході пасивного двополюсника (рис. 2.28) вхідний опір на частоті ω є $Z_{\text{ВХ}} = 3 - 3j$ кОм, напруга $u(t) = 6\sqrt{2}\cos(\omega t + 60°)$ В. Визначити струм $i(t)$ на вході цього двополюсника та активну і реактивну потужності.

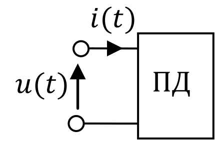


Рисунок 2.27

Розв'язання

Розрахунки будемо здійснювати у одиницях: опір – кОм, провідність – мСім, струм – мА, напруга – В, активна потужність – мВт, реактивна потужність – мВар.

Загальний опір кола $Z_{\text{ВХ}} = 3 - 3j = 3\sqrt{2}e^{-j45°}$ кОм.

Комплексна амплітуда напруги $\dot{U} = 6\sqrt{2}\cdot e^{j60°}$ В.

Комплексний струм за законом Ома

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{Z} = \frac{6\sqrt{2}\cdot e^{j60°}}{3\sqrt{2}e^{-j45°}} = 2e^{j105°} \text{ мА.}$$

Гармонічний струм двополюсника $i(t) = 2\cos(\omega t + 105°)$ мА.

Повна потужність кола

$$S = \frac{\dot{U}\cdot\dot{I}^*}{2} = \frac{6\sqrt{2}\cdot e^{j60°}\cdot 2e^{-j105°}}{2} = 6\sqrt{2}\cdot e^{-j45°} = 6 - j6.$$

Отже, активна потужність $P = 6$ мВт, реактивна потужність $Q = 6$ мВар.

<u>Відповідь</u>: $P = 6$ мВт, $Q = 6$ мВар, $i(t) = 2\cos(\omega t + 105°)$ мА.

Приклад 2.21. У колі (рис. 2.28) визначити якою повинна бути величина індуктивності L, щоб реактивна потужність на ній дорівнювала за величиною активній потужності. Чому буде дорівнювати для цього випадку ця потужність? Числові значення елементів: $R = 1$кОм, $\omega = 1000\ c^{-1}$, $u(t) = 5\sqrt{2}\cos(\omega t + 10°)$ В.

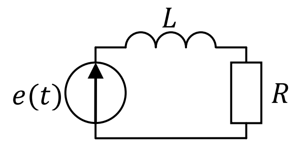


Рисунок 2.28

Розв'язання

Активна та реактивна потужності $P_R = R\cdot I^2$; $Q_L = X_L\cdot I^2$.

За умовою $P_R = Q_L$, звідси $R\cdot I^2 = X_L\cdot I^2$, отже $R = X_L$.

Реактивний опір індуктивності $X_L = \omega L$.

Звідси визначимо величину індуктивності

$$L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{R}{\omega} = \frac{1000}{1000} = 1 \text{ Гн.}$$

Повний опір кола $Z = R + jX_L = 1 + j = \sqrt{2}e^{j45°}$, кОм.

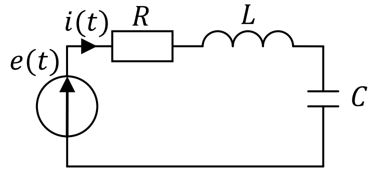
Комплексна амплітуда напруги $\dot{E} = 5\sqrt{2}e^{j10°}$.

Струм у колі за законом Ома

$$\dot{I} = \frac{\dot{E}}{Z} = \frac{5\sqrt{2}e^{j10°}}{\sqrt{2}e^{j45°}} = 5e^{-j35°}.$$

Повна потужність $S = \dot{U}\cdot\dot{I}^* = 5e^{j10°}\cdot 5e^{j35°} = 25e^{-j45°} = 12.5\sqrt{2} + 12.5\sqrt{2}j.$

Отже, $P_R = 12.5\sqrt{2}$ Вт, $Q_L = 12.5\sqrt{2}$ Вар.

Приклад 2.22. У колі (рис. 2.29) визначити потужності всіх елементів. Відомо, що напруга джерела є $e(t) = 8\sqrt{2}\cos(\omega t + 100°)$ В. Числові значення елементів кола становлять значення: $R = 4$ кОм, $X_L = 12$ кОм, $X_C = 16$ кОм.	 *Рисунок 2.29*

Розв'язання

Розрахунки будемо здійснювати у одиницях: опір – кОм, активна потужність – мВт, реактивна потужність – мВар, комплексна потужність – мВА.

Загальний опір кола

$$Z = R + Z_L + Z_C = R + jX_L - jX_C = 4 + 12j - 16j = 4 - 4j = 4\sqrt{2} \cdot e^{-j45°}$$

Комплексна амплітуда напруги

$$\dot{E} = 8\sqrt{2} \cdot e^{j100°}.$$

Комплексний струм за законом Ома

$$\dot{I} = \frac{\dot{E}}{Z} = \frac{8\sqrt{2} \cdot e^{j100°}}{4\sqrt{2} \cdot e^{-j45°}} = 2e^{j145°}.$$

Повна потужність джерела

$$S = \frac{\dot{E} \cdot \dot{I}^*}{2} = \frac{8\sqrt{2}e^{j100°} \cdot 2e^{-j145°}}{2} = 8\sqrt{2} \cdot e^{-j45°} = 8 - j8.$$

Отже, активна потужність $P = 8$ мВт,

реактивна потужність $Q = 8$ мВар.

модуль повної потужності $|S| = 8\sqrt{2}$ мВА.

Потужності на елементах

$$P = \frac{|I|^2 \cdot R}{2} = \frac{2^2 \cdot 4}{2} = 8 \text{ мВт};$$

$$Q_L = \frac{|I|^2 \cdot X_L}{2} = \frac{2^2 \cdot 12}{2} = 24 \text{ мВар};$$

$$Q_С = -\frac{|I|^2 \cdot X_C}{2} = -\frac{2^2 \cdot 16}{2} = -32 \text{ мВар}.$$

Комплексна потужність кола

$$S = P + Q_L + Q_C = 8 + 24j - 32j = 8 - 8j = P + jQ.$$

<u>Відповідь</u>: $P = 8$ мВт, $Q_L = 24$ мВар; $Q_С = -32$ мВар.

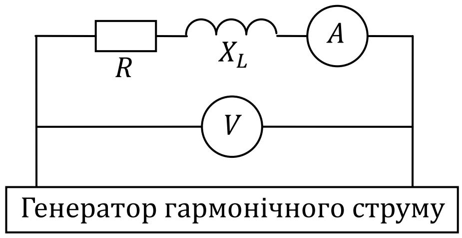
<table>
<tr>
<td>Приклад 2.23. Добротність RL-кола (рис. 2.30) на відомій частоті ω дорівнює 5. На вході цього кола діюче значення напруги та струму дорівнюють відповідно 15 В та 5 мА. Знайти опори R та X_L.</td>
<td>

Рисунок 2.30</td>
</tr>
</table>

Розв’язання

Розрахунки будемо здійснювати у одиницях: напруга – В, струм – мА, опір – кОм,.

Добротність гілки

$$Q_X = \frac{Q_L}{P_R} = \frac{I^2 X_L}{I^2 R} = \frac{X_L}{R}.$$

Реактивний індуктивний опір

$$X_L = R \cdot Q_X = 5R.$$

Модуль вхідного опору

$$|Z| = \frac{U_Д}{I_Д} = \frac{15}{5} = 3 \text{ кОм}.$$

Загальний опір кола

$$Z = R + jX_L = \sqrt{R^2 + X_L^2} e^{arctg(X_L/R)}.$$

Модуль опора гілки

$$3 = \sqrt{(5R)^2 + R^2}.$$

Спростимо вираз

$$3 = R\sqrt{26}.$$

Звідси визначимо активний опір

$$R = \frac{3}{\sqrt{26}} \text{ кОм}.$$

Реактивний опір індуктивності

$$X_L = 5R = \frac{15}{\sqrt{26}} \text{ кОм}.$$

Відповідь: $R = 3/\sqrt{26}$ кОм, $X_L = 15/\sqrt{26}$ кОм .

Приклад 2.24. У колі (рис. 2.31) на відомій частоті ω знайти реактивний опір та коефіцієнт потужності. На вході цього кола діюче значення напруги та струму дорівнюють відповідно 40 В та 4 мА. Активний опір $R = 8$ кОм.

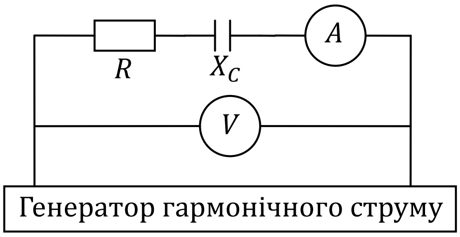


Рисунок 2.31

Розв'язання

Розрахунки будемо здійснювати у одиницях: напруга – В, струм – мА опір – кОм, активна потужність – мВт, повна потужність – мВА.

Модуль вхідного опору

$$|Z| = \frac{U_Д}{I_Д} = \frac{40}{4} = 10 \text{ кОм}.$$

Загальний опір кола та його модуль

$$Z = R - jX_C, \quad |Z| = \sqrt{R^2 + X_C^2}$$

Звідси визначимо

$$X_C = \sqrt{|Z|^2 - R^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6 \text{ кОм}.$$

Активна та повна потужності

$$P = I_Д^2 \cdot R = 4^2 \cdot 8 = 128 \text{ мВт};$$

$$|S| = I_Д \cdot U_Д = 4 \cdot 40 = 160 \text{ мВА};$$

Побудуємо трикутник потужностей (рис. 2.32).

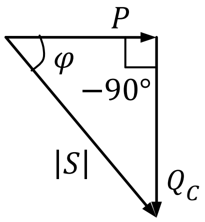


Рисунок 2.32

Коефіцієнт потужності

$$k_P = \cos\varphi = \frac{P}{|S|} = \frac{128}{160} = 0.8.$$

<u>Відповідь</u>: $X_C = 6$ кОм, $k_P = 0.8$.

2.6. Визначення схем заміщення

Приклад 2.25. У пасивному двополюснику (рис. 2.33) визначити активну і реактивну потужності, струм $i(t)$, накреслити послідовну та паралельну схеми заміщення на частоті $\omega = 2 \cdot 10^6$ рад/с із значення елементів. На вході двополюсника вхідна напруга $u(t) = 20\cos(\omega t + 10°)$ В та провідність на цій частоті становить $Y_{\text{ВХ}} = 0.5 + 0.5j$ мСім.

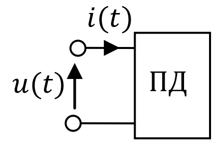


Рисунок 2.33

Розв'язання

Розрахунки будемо здійснювати у одиницях: індуктивність – мГн, ємність – нФ, опір – кОм, провідність – мСім, частота – рад/мкс.

Вхідний опір кола для послідовної схеми (рис. 2.34)

$$Z_{BX} = \frac{1}{Y_{BX}} = \frac{1}{0{,}5 + 0{,}5j} = \frac{2}{1+j} = \sqrt{2}e^{-j45°} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 - j \text{ кОм.}$$

Звідси визначаємо $R = 1$ кОм, $X_C = 1$ кОм.

Реактивний ємнісний опір

$$X_C = \frac{1}{\omega C}.$$

Звідси визначимо величину ємності

$$C = \frac{1}{\omega X_C} = \frac{1}{2 \cdot 1} = 0.5 \text{ нФ.}$$

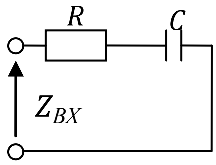


Рисунок 2.34

Комплексна амплітуда напруги $\dot{U} = 20 \cdot e^{j10°}$ В.

Комплексний струм за законом Ома

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{Z_{BX}} = \frac{20 \cdot e^{j10°}}{\sqrt{2}e^{-j45°}} = 10\sqrt{2}e^{j55°} \text{ мА.}$$

Гармонічний струм $i(t) = 10\sqrt{2}\cos(\omega t + 55°)$ мА.

Повна потужність кола

$$S = \frac{\dot{U} \cdot \dot{I}^*}{2} = \frac{20 \cdot e^{j10°} \cdot 10\sqrt{2}e^{-j55°}}{2} = 100\sqrt{2} \cdot e^{-j45°} = 100 - j100.$$

Отже, $P = 100$ мВт, $Q = -100$ мВар.

Зобразимо паралельну схему заміщення (рис. 2.35). Її можна накреслити на основі вхідної провідності $Y_{BX} = 0{,}5 + 0{,}5j$ мСім. Звідси $g = 0{,}5$ мСім, тоді $R = 1/g = 1/0{,}5 = 2$ кОм. Також $b_C = \omega C$, тоді $C = b_C/\omega = 0{,}5/2 = 0{,}25$ нФ.

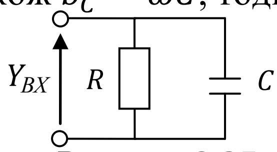
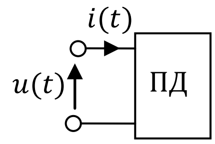


Рисунок 2.35

<u>Відповідь</u>: $i(t) = 10\sqrt{2}\cos(\omega t + 55°)$ мА, $P = 100$ мВт, $Q = -100$ мВар.

Приклад 2.26. У пасивному двополюснику (рис. 2.36) визначити активну і реактивну потужності та напруги, накреслити послідовну схему заміщення на частоті $\omega = 0.25 \cdot 10^6$ рад/с, вказати значення елементів схеми. На вході двополюсника напруга та струм на цій частоті становлять $u(t) = 10\cos(\omega t + 55°)$ В, $i(t) = 20\cos(\omega t + 10°)$ мА.	 *Рисунок 2.36*

Розв'язання

Розрахунки будемо здійснювати у одиницях: індуктивність – мГн, ємність – нФ, опір – кОм, частота – рад/мкс, активна потужність – мВт.

Представимо струм та напругу у вигляді комплексних амплітуд

$$\dot{I} = 20 \cdot e^{j10°}, \dot{U} = 10 \cdot e^{j55°}.$$

Повна потужність пасивного двополюсника

$$\dot{S} = \frac{\dot{U}I^*}{2} = \frac{10 \cdot e^{j55°} \cdot 20 \cdot e^{-j10°}}{2} = 100e^{-j45°} =$$

$$= 100(\cos(-45°) + j\sin(-45°)) = 100(\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}) = 50\sqrt{2} - j50\sqrt{2}.$$

Отже, активна та реактивна потужності становлять

$$P = 50\sqrt{2} \text{ мВт}, \qquad Q = -50\sqrt{2} \text{ мВар}.$$

За законом Ома вхідний опір пасивного двополюсника для визначення послідовної схеми заміщення (рис. 2.37 а)

$$Z_{BX} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{10 \cdot e^{j55°}}{20 \cdot e^{j10°}} = 0.2e^{-j45°} = 0.2(\cos(-45°) + j\sin(-45°)) =$$

$$= 0.2(\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}) = 0.1\sqrt{2} - j0.1\sqrt{2}.$$

Звідси визначимо, що

$$R = 0.1\sqrt{2} = 0.14 \text{ кОм, тоді } X_C = 0.1\sqrt{2} = 0.14 \text{ кОм}.$$

З іншого боку реактивний ємнісний опір

$$X_C = \frac{1}{\omega C}, \quad \to C = \frac{1}{\omega X_C} = \frac{1}{0.25 \cdot 0.1\sqrt{2}} = 28.3 \text{ нФ}.$$

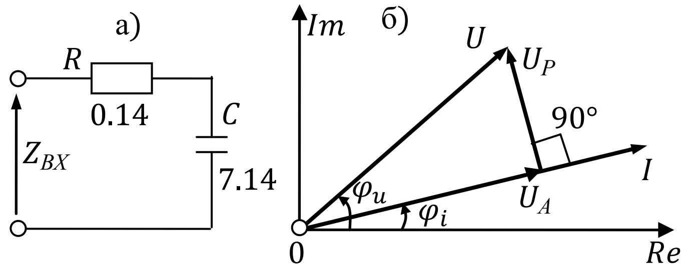


Рисунок 2.37

На комплексній площині, від кінця вектора напруги опустимо перпендикуляр на вектор струму. Активна та реактивна складові напруги (рис. 2.37 б)

$$U_A = |I| \cdot \cos(\varphi_U - \varphi_I) = 10 \cdot \cos(45°) = 5\sqrt{2} \text{ В};$$

$$U_P = |I| \cdot sin(\varphi_U - \varphi_I) = 10 \cdot \sin(45°) = 5\sqrt{2} \text{ В}.$$

<u>Відповідь</u>: $P = 50\sqrt{2}$ мВт, $Q = -50\sqrt{2}$ мВар, $U_A = 5\sqrt{2}$ В, $U_P = 5\sqrt{2}$ В.

2.7. Метод еквівалентного генератора

Приклад 2.27. У колі (рис. 2.38) визначити максимальну активну потужність у навантаженні.

а) Яким повинне бути $Z_Г$, щоб в опорі $R_Н$ була отримана максимальна активна потужність. Числові значення: $R_Н = 4$ кОм, $L_Н = 1$ мГн, $\omega = 2 \cdot 10^6$ рад/с, $e(t) = 4\sqrt{2}\cos(\omega t + 110°)$ В;

б) Яким повинне бути $Z_Н$, щоб на ньому була виділена максимальна активна потужність. Числові значення елементів: $Z_Г = 6 - 2j$, кОм, робоча частота $\omega = 3 \cdot 10^6$ рад/с, $e(t) = 12\sqrt{2}\cos(\omega t + 25°)$, В.

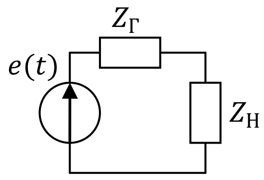


Рисунок 2.38

Розв'язання

Розрахунки будемо здійснювати у одиницях індуктивність – мГн, ємність – нФ, опір – кОм, частота – МГц.

а) Опір навантаження

$$Z_H = R_Н + j\omega L = 4 + 2j$$

Потужність у навантаженні

$$P_H = I^2 R_H = \frac{E_Д^2}{(R_H + R_Г)^2 + (X_H + X_Г)^2} R_H.$$

При цьому максимальна активна потужність у навантаженні виділиться, коли знаменник прийме мінімальне значення, а це можливе коли $X_H = -X_Г$ та $R_Г = 0$ проаналізувавши вираз для потужності.

Отже, опір генератора

$$Z_Г = R_Г + jX_Г = 0 - 2j, \text{кОм}.$$

При цьому максимальна потужність становить

$$P_{max} = \frac{E_Г^2}{R_H} = \frac{4^2}{4} = 4 \text{ мВт}.$$

б) Потужність у навантаженні

$$P_H = I^2 R_H = \frac{E_Д^2}{(R_H + R_Г)^2 + (X_H + X_Г)^2} R_H.$$

Опір генератора

$$Z_Г = R_Г + jX_Г = 6 - 2j$$

У навантаженні виділиться максимальна потужність за умови

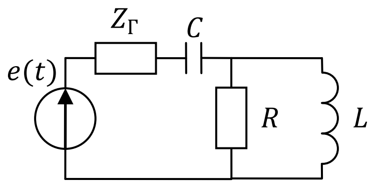
$$Z_H = Z_Г^* = 6 + 2j.$$

При цьому максимальна потужність становить

$$P_{max} = \frac{E_Г^2}{4R_H} = \frac{12^2}{4 \cdot 6} = 6 \text{ мВт}.$$

<u>Відповідь</u>: а) $Z_Г = 0 - 2j$ кОм, $P_{max} = 4$ мВт;

б) $Z_Н = 6 + 2j$ кОм кОм, $P_{max} = 6$ мВт.

Приклад 2.28. У колі (рис. 2.39) визначити при яких значеннях опора генератора $Z_Г$ він буде віддавати максимальну активну потужність? Знайти цю потужність. Відомо, що опори кола $X_L = X_C = R = 6$ кОм, напруга джерела $e(t) = 9\sqrt{2}\cos(\omega t + 15°)$, В.	*Рисунок 2.39*

Розв'язання

Розрахунки будемо здійснювати у одиницях: активна потужність – мВт, опір – кОм.

Опір навантаження (рис. 2.40 а)

$$Z_H = Z_С + \frac{R \cdot Z_L}{R + Z_L} = -jX_L + \frac{R \cdot jX_L}{R + jX_L} = -6j + \frac{6 \cdot 6j}{6 + 6j} =$$

$$= -6j + \frac{6j}{1 + j} = -6j + \frac{6e^{j90°}}{\sqrt{2}e^{j45°}} = -6j + 3\sqrt{2}e^{j45°} =$$

$$= -6j + 3\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -6j + 3 + 3j = 3 - 3j = 3\sqrt{2}e^{-j45°}.$$

Активна потужність у навантаженні

$$P_H = |I|^2 R_H = \frac{E_Д^2}{(R_H + R_Г)^2 + (X_H + X_Г)^2} R_H,$$

$$I = \frac{E_Д}{(R_H + R_Г) + j(X_H + X_Г)}$$

Функція $P_H(R_H)$ буде максимальною, коли знаменник її буде мінімальним, а для цього необхідно $R_Г = 0$, а $X_H = -X_Г$. Отже, $Z_Г = 0 + 3j$ кОм.

Максимальна активна потужність (рис. 2.40 б)

$$P_{max} = \frac{E_Г^2}{R_H} = \frac{9^2}{3} = 27 \text{ мВт}.$$

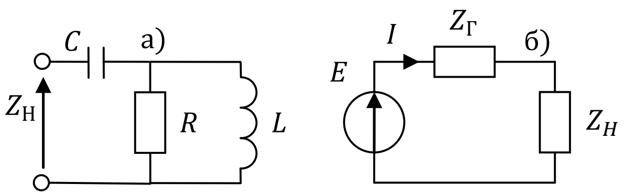


Рисунок 2.40

<u>Відповідь</u>: $Z_Г = 0 + 3j$ кОм, $P_{max} = 27$ мВт;

Приклад 2.29. У колі (рис. 2.41) визначити при яких значеннях елементів R та C буде отримана максимальна активна потужність у навантаження? Знайти цю потужність. Відомо, що: $Z_{\Gamma} = 8 + 2j$ кОм, робоча частота $\omega = 0.1 \cdot 10^6$ рад/с, вираз джерела напруги $e(t) = 17\sqrt{2}\cos(\omega t - 15°)$ В.

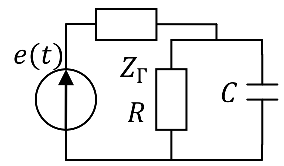


Рисунок 2.41

Розв'язання

Умова передачі максимальної потужності у навантаження

$$Z_H = Z_{\Gamma}^* = R_H - jX_H = 8 - 2j;$$

Перерахуємо паралельну гілку у послідовну

$$Z_H = \frac{R \cdot (-jX_C)}{R - jX_C} = \frac{-jX_C R(R + jX_C)}{R^2 + X_C^2} = \frac{X_C^2 R}{R^2 + X_C^2} - j\frac{X_C R^2}{R^2 + X_C^2}.$$

За умовою

$$\frac{X_C^2 R}{R^2 + X_C^2} = 8; \qquad \frac{X_C R^2}{R^2 + X_C^2} = 2.$$

Розділимо перший вираз на другий

$$\frac{X_C}{R} = 4.$$

Звідси визначимо $X_C = 4R$.

Підставимо у вираз

$$\frac{X_C R^2}{R^2 + X_C^2} = \frac{4R \cdot R^2}{R^2 + (4R)^2} = \frac{4R^3}{17R^2} = \frac{4}{17}R = 2.$$

Звідси активний опір

$$R = \frac{17}{2} \cong 8.5 \text{ кОм}.$$

Тоді ємнісний опір $X_C = 4 \cdot R = 4 \cdot \frac{17}{2} = 34$ кОм.

Звідси значення ємності

$$C = \frac{1}{\omega \cdot X_C} = \frac{1}{0.1 \cdot 34} = 0.29 \text{ нФ}.$$

Максимальна активна потужність

$$P_{max} = \frac{E_{\Gamma}^2}{4R_H} = \frac{17^2}{4 \cdot 8.5} = 17 \text{ мВт}.$$

Відповідь: $R = 34$ кОм, $C = 0.29$ нФ, $P_{max} = 17$ мВт.

Приклад 2.30. У колі (рис. 2.42) визначити при якому опорі навантаження Z_H на ньому виділиться максимальна потужність та обчислити її значення. Значення елементів кола: $R = 20$ кОм, $X_C = 10$ кОм, $E = 10$ В.

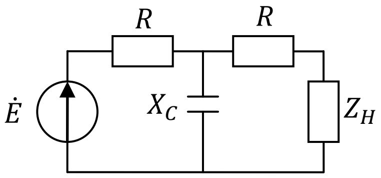


Рисунок 2.42

Розв'язання

У колі (рис. 2.42) від'єднаємо гілку із опором Z_H та представимо схему у вигляді еквівалентного генератору із параметрами $\dot{E}_{\text{ЕГ}}$ та $Z_{\text{ЕГ}}$ (рис. 2.43 в)

Напруга холостого ходу (рис. 2.43 а)

$$U_{\text{ХХ}} = U_C = \dot{I} \cdot Z_C = \dot{I} \cdot (-jX_C) = \frac{\dot{E}}{R - jX_C} X_C e^{-j90°} = \frac{10}{20 - j10} \cdot 10e^{-j90°} =$$
$$= \frac{100e^{-j90°}}{22.4e^{-j26.6°}} \cong 4.5e^{-j63{,}4°}.$$

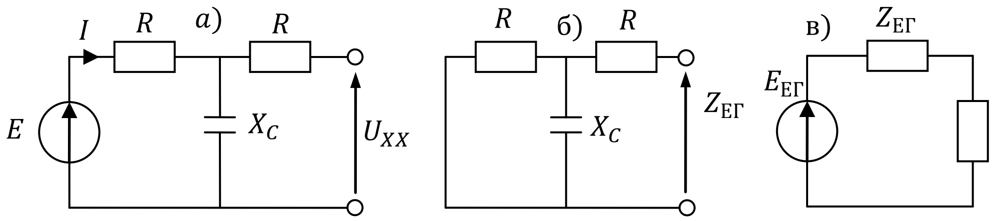


Рисунок 2.43

У колі (рис. 2.43 а) замінимо джерело напруги його внутрішнім опором, тобто закороткою у місці його включення (рис. 2.43 б) і визначимо опір еквівалентного генератора

$$Z_{ЕГ} = R + \frac{R \cdot Z_C}{R + Z_C} = R + \frac{R \cdot (-jX_C)}{R - jX_C} = 20 + \frac{20 \cdot (-j10)}{20 - j10} =$$
$$= 20 + \frac{200e^{-j90°}}{22.4e^{-j26.6°}} = 20 + 8.9e^{-j63.4°} \cong 24 - 8j \text{ кОм.}$$

У навантаженні виділиться максимальна потужність за умови

$$Z_H = Z_{ЕГ}^* = 24 + 8j \text{ кОм.}$$

При цьому максимальна потужність становить

$$P_{max} = \frac{E_{\text{ЕГ}}^2}{4R_H} = \frac{100^2}{4 \cdot 24} = 104.2 \text{ мВт.}$$

Відповідь: $Z_H = Z_{ЕГ}^* = 24 + 8j$ кОм., $P_{max} = 104.2$ мВт.

2.8. Розрахунок складних кіл

Приклад 2.31. У колі (рис. 2.44) визначити струм $i_3(t)$. Числові значення елементів такі: $X_{L1} = X_{C1} = 2$ кОм, $X_{C2} = 2{,}5$ кОм, X_{L2}=2 кОм, $R_1 = 3$ кОм, $R_2 = 5$ кОм, $R_3 = 4$ кОм,

$$e(t) = 6\sqrt{17}\cos(\omega t - 10°) \text{ В.}$$

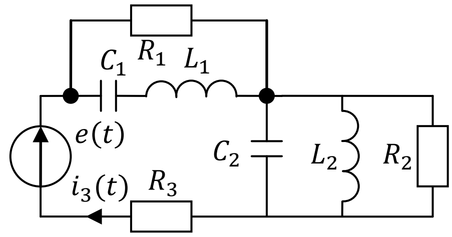


Рисунок 2.44

Розв'язання

Розрахунки будемо здійснювати у одиницях: опір – кОм, провідність – мСім, струм – мА, напруга – В.

Оскільки $X_{L1} = X_{C1} = 2$ кОм, то ця гілка налаштована у резонанс і її опір дорівнює нулю. Отже опір R_1 буде закорочений і таким чином не буде впливати на схему.

Комплексні провідності паралельних гілок

$$Y_{L2} = \frac{1}{Z_{L2}} = \frac{1}{jX_{L2}} = \frac{1}{2j} = -0.5j \text{ мСім};$$

$$Y_{C2} = \frac{1}{Z_{C2}} = \frac{1}{-jX_{C2}} = \frac{j}{2.5} = 0.4j \text{ мСім};$$

$$g_2 = \frac{1}{R_2} = \frac{1}{5} = 0.2 \text{ мСім}.$$

Загальна провідність паралельних гілок (рис. 2.45 а)

$$Y_{ab} = Y_{L2} + Y_{C2} + g_2 = -0.5j + 0.4j + 0.2 = 0.2 - 0.1j \text{ мСім}.$$

Загальний опір паралельних гілок (рис. 2.45 б)

$$Z_{ab} = \frac{1}{Y_{ab}} = \frac{1}{0.2 - 0.1j} = \frac{0.2 + 0.1j}{0.04 + 0.01} = \frac{0.2 + 0.1j}{0.05} = 4 + 2j \text{ кОм}.$$

Загальний опір кола

$$Z_{\text{ЗАГ}} = R_3 + Z_{ab} = 4 + 4 + 2j = 8 + 2j = \sqrt{68}e^{j14°} = 2\sqrt{17}e^{j14°}.$$

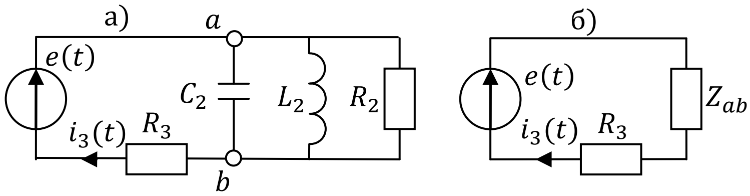


Рисунок 2.45

Комплексний струм за законом Ома

$$\dot{I}_3 = \frac{\dot{E}}{Z_{\text{ЗАГ}}} = \frac{6\sqrt{17}e^{-j10°}}{2\sqrt{17}e^{j14°}} = 3e^{-j24°} \text{ мА}.$$

Вираз струму

$$i_3(t) = 3\cos(\omega t - 24°) \text{ мА}.$$

<u>Відповідь</u>: $i_3(t) = 3\cos(\omega t - 24°)$ мА.

Приклад 2.32. У колі (рис. 2.46) знайти показання приладів. Джерело $j(t) = 5\sqrt{2}\cos(\omega t - 10°)$ мА, абсолютні значення опорів всіх реактивних елементів на деякій частоті ω дорівнюють 2.5 кОм, а активних – 4 кОм.

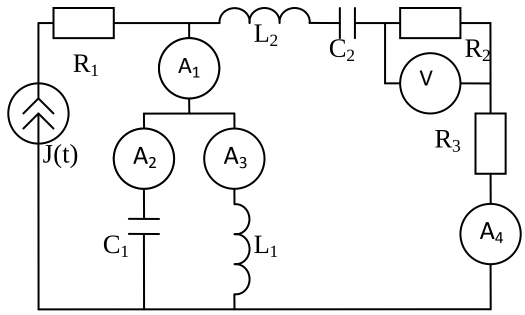


Рисунок 2.46

Розв'язання

Розрахунки будемо здійснювати у одиницях: струм – мА, напруга – В, опір – кОм.

Загальний опір паралельно з'єднаних ємності C_1 та індуктивності L_1

$$Z_{10} = \frac{Z_{L1} \cdot Z_{C1}}{Z_{L1} + Z_{C1}} = \frac{2.5j \cdot (-2.5j)}{2.5j - 2.5j} = \frac{6.25}{0} = \infty.$$

Отже, на цій частоті буде розрив, тоді показання амперметрів 1 та 4 становитиме

$$A_1 = 0\,, \quad I_{A4} = 5 \text{ мА}.$$

Показання вольтметру

$$U_V = I_{A4} \cdot R_2 = 5 \cdot 4 = 20 \text{ В}.$$

Вхідний опір ділянки кола (рис. 2.47)

$$Z_{ab} = Z_{L2} + Z_{C2} + R_2 + R_3 = jX_{L2} - jX_{C2} + R_2 + R_3 = 8 \text{ кОм}.$$

За законом Ома

$$U_{ab} = I_{A4} \cdot Z_{ab} = 5 \cdot 8 = 40 \text{ В}.$$

Струми у гілках за законом Ома

$$I_{L1} = \frac{U_{ab}}{|Z_{L1}|} = \frac{40}{2.5} = 16 \text{ мА};$$

$$I_{C1} = \frac{U_{ab}}{|Z_{C1}|} = \frac{40}{2.5} = 16 \text{ мА}.$$

Отже, амперметри показують $I_{A3} = 16$ мА, $I_{A2} = 16$ мА.

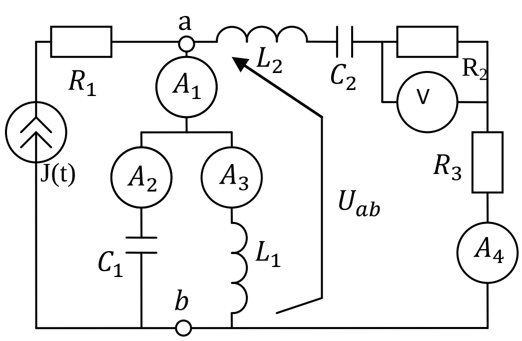


Рисунок 2.47

Відповідь: $I_{A1} = 0$, $I_{A2} = 16$ мА, $I_{A3} = 16$ мА, $I_{A4} = 5$ мА, $U_V = 40$ В.

Приклад 2.33. За показаннями трьох вольтметрів, що ввімкнені у коло (рис. 2.48) визначити потужність, що витрачається у індуктивній котушці R, L, якщо $R_1 = 2$кОм, а показання приладів $U = 12$ В, $U_1 = 8$В, $U_2 = 6$ В. Побудувати векторну діаграму напруг.

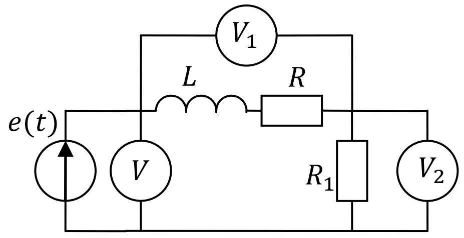


Рисунок 2.48

Розв'язання

За законом Ома амплітуда струму у колі

$$|I| = \frac{U_1}{R_1} = \frac{8}{2} = 4 \text{ мА}.$$

Модуль повного опру котушки:

$$|Z_\text{К}| = |R + jX_L| = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \frac{U_2}{I} = \frac{6}{4} = 1.5 \text{ кОм}.$$

Модуль повного опру котушки із урахуванням R_1

$$|Z_\text{К}| = |R + R_1 + jX_L| = \sqrt{(R + R_1)^2 + X_L^2} = \frac{U}{I} = \frac{12}{4} = 3 \text{ кОм}.$$

У результаті одержали систему рівнянь:

$$\begin{cases} R^2 + X_L^2 = 1.5^2; \\ (R + R_1)^2 + X_L^2 = 3^2. \end{cases}$$

Із першого рівняння системи визначимо $X_L^2 = 15^2 - R^2$ та підставимо у перше

$$(R + 2)^2 + 1.5^2 - R^2 = 3^2.$$

Розкриємо дужки $R^2 + 4R + 2^2 + 1.5^2 - R^2 = 3^2$.

Спростимо рівняння $4R = 3^2 - 2^2 - 1.5^2 = 9 - 4 - 2.25 = 2.75$

Звідси одержимо

$$R = \frac{2.75}{4} \text{ Ом}.$$

Потужність, що витрачається в індуктивності

$$P = I^2 R = 4^2 \cdot \frac{2.75}{4} = 11 \text{ мВт}.$$

Якісно побудуємо векторну діаграму (рис. 2.49).

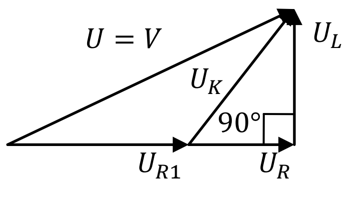


Рисунок 2.49

<u>Відповідь</u>: $P = 11$ мВт..

2.9. Кола із взаємоіндукцією

Приклад 2.34. Визначити напругу на індуктивності L_1 у колі при узгодженому та неузгодженому протіканню струмів (рис. 2.50). Відомо, що $\omega_0 = 10^6$рад/с, $M = 0{,}1$ мГн, $L_1 = L_2 = 1$ мГн. Струми джерел: $J_1 = \sqrt{2}\cos(\omega t)$ мА, $J_2 = 10\sqrt{2}\cos(\omega t + 90°)$ мА.

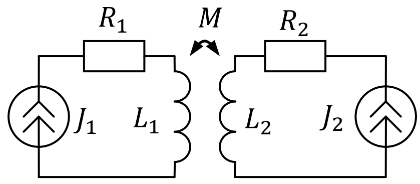


Рисунок 2.50

Розв'язання

Розрахунки буде здійснювати у одиницях опір – кОм, ємність – нФ, індуктивність – мГн, взаємна індуктивність – мГн, частота – рад/мкс.

Комплексні амплітуди струмів $\dot{I}_1 = \sqrt{2} \cdot e^{j0°}$, $\dot{I}_2 = 10\sqrt{2} \cdot e^{j90°} = 10\sqrt{2}j$.

Повні опори індуктивностей $Z_{L1} = j\omega L_1 = 1j$ кОм, $Z_{L2} = j\omega L_2 = 1j$ кОм.

Опір зв'язку $Z_M = j\omega M = 0{,}1j$ кОм.

Напруга за узгодженого протікання струмів

$$\dot{U}_{L1} = Z_{L1} \cdot \dot{I}_1 + Z_M \cdot \dot{I}_2 = \sqrt{2} \cdot j + 0.1j \cdot 10\sqrt{2}j = -\sqrt{2} + \sqrt{2}j = 2e^{j135°}$$

гармонічна напруга $u_L(t) = 2\cos(\omega t + 135°)$ В.

Напруга за неузгодженого протікання струмів

$$\dot{U}_{L1} = Z_{L1} \cdot \dot{I}_1 - Z_M \cdot \dot{I}_2 = \sqrt{2} \cdot j - 0{,}1j \cdot 10\sqrt{2}j = \sqrt{2} + \sqrt{2}j = 2e^{j45°}$$

Гармонічна напруга $u_L(t) = 2\cos(\omega t + 45°)$ В.

Приклад 2.35. Знайти зсув фази між напругою та струмом у колі (рис. 2.51) на частоті $\omega_0 = 10^6$. Коло має такі параметри елементів $L_1 = 2$ мГн, $L_2 = 2{,}5$ мГн, $C = 0{,}25$ нФ, $R = 1$ кОм, взаємоіндукція $M = 0{,}25$мГн.

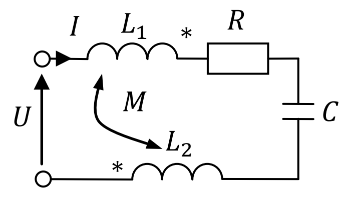


Рисунок 2.51

Розв'язання

Розрахунки будемо здійснювати у одиницях: опір – кОм, індуктивність – мГн, ємність – нФ. Оскільки струм I через котушки індуктивності L_1 та L_2 протікає узгоджено, то запишемо вхідний опір кола

$$Z = Z_{L1} + Z_M + R + Z_C + Z_{L2} + Z_M = Z_{L1} + R + Z_C + Z_{L2} + 2Z_M$$

Опори елементів

$$Z_{L1} = j\omega L_1 = j \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 10^{-3} = 2 \cdot 10^3 j \text{ Ом} = 2j \text{ кОм},$$

$$Z_{L2} = j\omega L_2 = j \cdot 10^6 \cdot 1 \cdot 10^{-3} = 1 \cdot 10^3 j \text{ Ом} = 2{,}5j \text{ кОм},$$

$$Z_M = j\omega M = j \cdot 10^6 \cdot 0{,}25 \cdot 10^{-3} = 0{,}25 \cdot 10^3 j \text{ Ом} = 0{,}25j \text{ кОм},$$

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j \cdot 10^6 \cdot 0{,}25 \cdot 10^{-3}} = -4 \cdot 10^3 j \text{ Ом} = -4j \text{ кОм},$$

Підставимо числові значення у вираз для вхідного опору кола

$$Z = Z_{L1} + R + Z_C + Z_{L2} + 2Z_M = 2j + 1 - 4j + 2{,}5j + 0{,}5j = 1 + j = \sqrt{2}e^{j45°}.$$

Оскільки $Z = U/I$, то зсув фази між напругою та струмом буде не що інше як фаза виразу вхідного опору φ_Z. Отже, зсув фази між напругою та струмом становить $\varphi_Z = 45°$.

Приклад 2.36. Знайти вхідний опір кола та записати систему рівнянь на основі методу контурних струмів. Замінити магнітні зв'язки керованими джерелами. Записати систему рівнянь. Визначити еквівалентну індуктивність схеми кола (рис. 2.52).

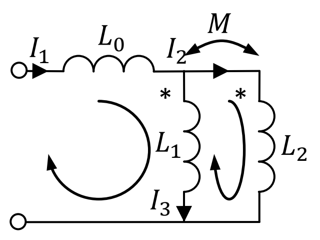


Рисунок 2.52

Розв'язання

Узгоджене чи неузгоджене протікання струмів буде визначати виходячи з того, як контурні струми протікають через котушки із магнітним зв'язком.

Складемо систему рівнянь на основі другого закону Кірхгофа

$$\begin{cases} I_1 Z_{L0} + I_3 Z_{L1} + I_2 Z_M = 0, \\ I_2 Z_{L2} + I_3 Z_M - I_3 Z_{L1} - I_2 Z_M = 0. \end{cases}$$

Введемо заміну: $I_1 = I_I$, $I_2 = I_{II}$, $I_3 = I_I - I_{II}$ і запишемо

$$\begin{cases} I_I(Z_{L0} + Z_{L1}) - I_{II}(Z_{L1} - Z_M) = 0, \\ -I_I(Z_{L1} - Z_M) + I_{II}(Z_{L1} + Z_{L2} - 2Z_M) = 0. \end{cases}$$

Матриця опорів

$$Z = \begin{bmatrix} Z_{L0} + Z_{L1} & -(Z_{L1} - Z_M) \\ -(Z_{L1} - Z_M) & Z_{L1} + Z_{L2} - 2Z_M \end{bmatrix}.$$

Визначник системи

$$\Delta = (Z_{L0} + Z_{L1})(Z_{L1} + Z_{L2} - 2Z_M) - (Z_{L1} - Z_M)(Z_{L1} - Z_M)$$

Із матриці через вхідний опір кола

$$Z_{\text{ВХ}} = \frac{\Delta}{\Delta_{11}} = \frac{(Z_{L0} + Z_{L1})(Z_{L1} + Z_{L2} - 2Z_M) - (Z_{L1} - Z_M)^2}{Z_{L1} + Z_{L2} - 2Z_M} =$$

$$= j\omega \frac{(L_0 + L_1)(L_1 + L_2 - 2M) - (L_1 - M)^2}{L_1 + L_2 - 2M} = j\omega L_{\text{ЕК}}.$$

Зобразимо еквіваленту схему, замінивши індуктивні зв'язки керованими джерелами. У якості керованих джерел оберемо джерело напруги кероване струмом (рис. 2.53).

Складемо систему рівнянь на основі методу контурних струмів для заданої схеми

$$\begin{cases} I_1(Z_{L0} + Z_{L1}) - I_2(Z_{L1}) = -I_2(Z_M), \\ -I_1(Z_{L1}) + I_2(Z_{L1} + Z_{L2}) = (I_1 - I_2)(Z_M) - I_2 Z_M. \end{cases}$$

Перенесемо невідомі змінні із правої частини рівнянь у ліву

$$\begin{cases} I_1(Z_{L0} + Z_{L1}) - I_2(Z_{L1}) - I_2(Z_M) = 0, \\ -I_1(Z_{L1}) + I_2(Z_{L1} + Z_{L2}) - (I_1 - I_2)(Z_M) + I_2 Z_M = \end{cases}$$

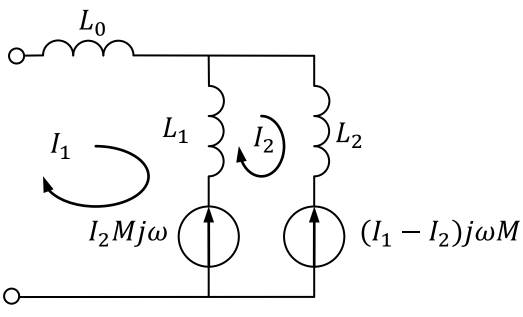


Рисунок 2.53

Спростимо систему

$$\begin{cases} I_1(Z_{L0} + Z_{L1}) - I_2(Z_{L1} - Z_M) = 0, \\ -I_1(Z_{L1} - Z_M) + I_2(Z_{L1} + Z_{L2} - 2Z_M) = 0. \end{cases}$$

Як видно системи рівнянь зійшлися, отже схема зображена правильно.

2.10. Олімпіадні задачі

Приклад 2.37*. У колі (рис. 2.54) визначити R, Z_L та Z. При замкненому ключі К потужність джерела $\dot{S}_E = 50 + 350j$ мВА, а при розімкненому $\dot{S}_E = 1250$ мВА. Діюче значення напруги джерела $E = 50$ В.

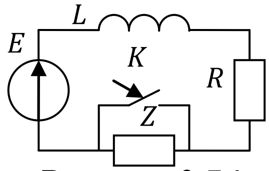


Рисунок 2.54

Розв'язання

Для кола при замкненому ключі потужність джерела напруги

$$\dot{S}_E = \dot{E} \cdot \dot{I}^*.$$

Звідси визначимо

$$\dot{I}^* = \frac{\dot{S}_E}{\dot{E}} = \frac{50 + j350}{50} = 1 + 7j.$$

Комплексно-спряжений струм $\dot{I} = \dot{I}^* = 1 - 7j$.

Модуль струму

$$|\dot{I}| = \sqrt{1^2 + 7^2} = \sqrt{50}.$$

Потужності споживачів

$$P_R = |I|^2 R = 50; \;\; Q_L = |I|^2 X_L = 350.$$

Із формули балансу потужностей

$$\dot{S}_E = P + jQ = 50 + j350.$$

Звідси визначаємо активний та реактивний опори

$$R = \frac{P_R}{|\dot{I}|^2} = \frac{50}{(\sqrt{50})^2} = 1 \text{ кОм}; \quad X_L = \frac{Q_L}{|\dot{I}|^2} = \frac{350}{(\sqrt{50})^2} = 7 \text{ кОм}.$$

Тоді повний реактивний опір індуктивності $Z_L = jX_L = 7j$.

Оскільки при розімкненому ключі потужність джерела напруги $S_E = 1250$ мВА активна, то для того щоб комплексний опір генератора $R_1 + jX_1$ був активним, необхідно, щоб його реактивна складова компенсувалася $X_1 = Z_L^* = -7j$.

Тоді потужність джерела напруги

$$S_E = E \cdot |I_1| = 1250 \text{ мВт}.$$

Звідси визначимо модуль струму

$$|I_1| = \frac{S_E}{E} = \frac{1250}{50} = 25 \text{ мА}.$$

Потужність активних споживачів

$$P_R = |I_1|^2 (R_1 + R)$$

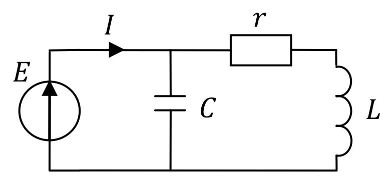
Звідси визначимо

$$R_1 = \frac{P_R}{|I_1|^2} - R = \frac{1250}{25^2} - 1 = \frac{1250}{625} - 1 = 2 - 1 = 1 \text{ кОм}.$$

Отже,

$$Z = R_1 + jX_1 = 1 - 7j \text{ кОм}$$

<u>Відповідь</u>: $R = 1$ кОм, $Z_L = 7j$ кОм, $Z = 1 - 7j$ кОм.

Задача 2.38*. У колі (рис. 2.55) визначити за якої умови струм I не залежить від значення активного опору r. Визначити цей струм. При виведенні можна вважати, що діюче значення напруги джерела напруги становить 1 В.	 *Рисунок 2.55*

Розв'язання

Вхідний опір кола

$$Z_{\text{ВХ}} = \frac{Z_C(r+Z_L)}{Z_C+r+Z_L} = \frac{-jX_C(r+jX_L)}{-jX_C+r+jX_L} = \frac{X_CX_L - jX_Cr}{r+j(X_L-X_C)}$$

За умовою $E = 1$ В.

Струм за законом Ома

$$I = \frac{E}{Z_{\text{ВХ}}} = \frac{r+j(X_L-X_C)}{X_CX_L - jX_Cr}, \quad |I| = \sqrt{\frac{r^2+(X_L-X_C)^2}{(X_CX_L)^2-(X_Cr)^2}}$$

Для того, щоб струм у колі не залежав від величини опору r необхідно виконання умови

$$\frac{r^2+(X_L-X_C)^2}{(X_CX_L)^2-(X_Cr)^2} = A = const.$$

Далі спростимо

$$r^2 + X_L^2 - 2X_CX_L + X_C^2 = AX_L^2X_C^2 + AX_C^2r^2.$$

Далі за умовою $r^2 = AX_C^2r^2$;

Звідси визначимо

$$A = \frac{r^2}{X_C^2r^2} = \frac{1}{X_C^2} = \frac{1}{\omega^2C^2}.$$

Підставимо у вираз значення A,

$$r^2 + X_L^2 - 2X_CX_L + X_C^2 = \frac{X_L^2X_C^2}{X_C^2} + \frac{X_C^2r^2}{X_C^2} = X_L^2 + r^2.$$

Спростимо одержаний вираз $X_C^2 - 2X_CX_L = 0$, $X_C = 2X_L$.

Звідси визначимо величину ємності та частоту

$$C = \frac{1}{2L\omega^2}; \qquad \omega = \frac{1}{\sqrt{2LC}}.$$

При цьому струм буде ($X_C = 2X_L$)

$$|I| = \sqrt{\frac{r^2+(X_L-2X_L)^2}{(2X_L\cdot X_L)^2-(2X_Lr)^2}} = \sqrt{\frac{r^2+X_L^2}{4X_L^2(r^2+X_L^2)}} = \sqrt{\frac{1}{4X_L^2}} = \frac{1}{2X_L}$$

Тоді струм

$$|I| = \frac{1}{2X_L} = \frac{1}{2\omega L} = \frac{\sqrt{2LC}}{2L} = \sqrt{\frac{C}{2L}}$$

<u>Відповідь</u>: $\omega = 1/\sqrt{2LC}, I = \sqrt{C/(2L)}.$

Задача 2.39[*]. У колі (рис. 2.56) визначити: Z_C, Z_L, R_1 та R_2. Відомо, що активна потужність $P_1 = P_2 = 10$ мВт, діючі значення напруг визначаються $E = U_C = 5$ В.

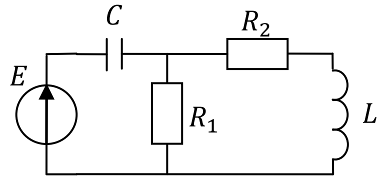


Рисунок 2.56

Розв'язання

На резонансі вхідний опір кола активний, оскільки реактивні опори компенсують одна одну

Отже, реактивні потужності

$$Q_C + Q_L = 0$$

Отже повна потужність джерела

$$S = P + jQ = P, \quad |S| = P = E \cdot |I|.$$

Звідси діюче значення струму

$$|I| = \frac{|S|}{E} = \frac{P}{E} = \frac{20}{5} = 4 \text{ кОм}.$$

Реактивний опір ємності

$$X_C = \frac{u_C}{|I|} = \frac{5}{4} = 1.25 \text{ кОм}, \quad Z_C = 1.25j, \qquad \text{кОм}.$$

Реактивна потужність ємності

$$Q_C = |I|^2 \cdot X_C = 4^2 \cdot 1.25 = 20 \ \text{мВар}.$$

На резонансі $Q_C = Q_L = 20$ мВар.

Оскільки вхідний опір кола активний, побудуємо векторну діаграму, що зображена на рис. 2.57 а.

За теоремою Піфагора

$$u_1 = \sqrt{E^2 + u_C^2} = \sqrt{5^2 + 5^2} = 5\sqrt{2} \text{ В}.$$

Активна потужність

$$P_1 = \frac{u_1^2}{R_1}.$$

Звідси визначимо опір

$$R_1 = \frac{u_1^2}{P_1} = \frac{(5\sqrt{2})^2}{10} = 5 \text{ кОм}.$$

Активна та реактивна потужності гілки з індуктивністю

$$P_2 = |I_L|^2 \cdot R_2 = 10 \ \text{мВт};$$
$$Q_L = |I_L|^2 \cdot X_L = 20 \ \text{мВар}.$$

Відношення потужностей

$$\frac{Q_L}{P_2} = \frac{|I_L|^2 \cdot X_L}{|I_L|^2 \cdot R_2} = \frac{X_L}{R_2} = 2$$

Звідси визначимо $X_L = 2R_2$.

Побудуємо векторну діаграму напруг (рис. 2.57 б)
За теоремою Піфагора

$$u_1 = \sqrt{u_2^2 + u_L^2}.$$

За законом Ома

$$u_2 = |I_L|R_2, \;\; u_L = |I_L|X_L.$$

Відношення напруг

$$\frac{u_L}{u_2} = \frac{|I_L|X_L}{|I_L|R_2} = \frac{X_L}{R_2} = 2.$$

Звідси визначимо, що

$$u_L = 2u_2$$

Підставимо у вираз за теоремою Піфагора

$$u_1^2 = u_2^2 + u_L^2 = u_2^2 + 4u_2^2 = 5u_2^2.$$

Звідси одержимо

$$u_2 = \frac{u_1}{\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \sqrt{10}\text{ В.}$$

Тоді напруга

$$u_L = 2u_2 = 2\sqrt{10}\text{ В.}$$

Потужності

$$P_2 = \frac{u_2^2}{R_2}, \quad Q_L = \frac{u_L^2}{X_L}.$$

Звідси визначимо опори

$$R_2 = \frac{u_2^2}{P_2} = \frac{(\sqrt{10})^2}{10} = 1\text{кОм}, \quad X_L = \frac{u_L^2}{Q_L} = \frac{(2\sqrt{10})^2}{20} = 2\text{кОм}$$

Отже, $Z_L = jX_L = 2j$.

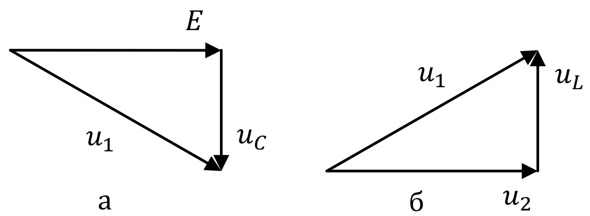


Рисунок 2.57

<u>Відповідь</u>: $Z_C = -1.25j$, $Z_L = 2j$, $R_1 = 5$ та $R_2 = 1$ кОм.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Основи теорії кіл. Збірник задач [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студентів спеціальності 172 «Телекомунікації та радіотехніка» / А. В. Булашенко, М. І. Ястребов; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл 2.88 Мбайт). – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. – 120с.
2. Методичні вказівки до практичних занять на тему «Розрахунок лінійних електричних кіл змінного струму» з дисципліни «Основи теорії кіл» для студентів радіотехнічного факультету, спеціальності 172 Телекомунікації та радіотехніка / Укладачі: А. В. Булашенко, М. І. Ястребов. – К.: КПІ ім.. Ігоря Сікорського, 2018. – 44с.
3. Атабеков Г. И. Основы теории цепей. – М.: Энергия, 1969. – 424с.
4. Зернов Н. В. Теория радиотехнических цепей / Н. В. Зернов, В. Г. Карпов. – Л.: Энергия, 1972.– 916с.
5. Основы теории цепей: учебник для вузов. / Г. В. Зевеке, П. А. Ионкин. – М.: Энергоатомиздат, 1989. – 528 с.
6. Основи теорії кіл: підручник для студентів вищих навчальних закладів. Ч.1 / Ю. О. Коваль, Л. В. Гринченко, І. О. Мілютченко, О.І. Рибіна; за аг. Редакцією В.М. Шокала та В. І. Правди. – Х.: Компанія Сміт, 2008. – 432 с.
7. Основи теорії кіл. Розрахунок лінійних електричних кіл постійного струму. Практикум. [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студентів спеціальності 172 «Телекомунікації та радіотехніка / А. В. Булашенко, М.І. Ястребов; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл 1.57 Мбайт). – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. – 62с.
8. Основи теорії та комп’ютерне моделювання електронних кіл: навчальний посібник [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студентів спеціальності 172 «Телекомунікації та радіотехніка» / В. Д. Сташук, А.В. Булашенко; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл 6.58 Мбайт). – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. – 400с.
9. Методичні вказівки до виконання роз.-граф. роботи № 1 для студентів напряму підготовки «Радіотехніка» з дисципліни «Основи теорії кіл» / Укладачі А. В. Булашенко, М. І. Ястребов. – К.: НТУУ «КПІ», 2015. – 56с.
10. Новгородцев А. Б. 30 лекций по теории электрических цепей: учебник для вузов. – СПб.: Политехника, 1995. – 519с.
11. Бычков Ю. А. Сборник задач и практикум по основам теории цепей. / Ю. А. Бычков, В. М. Золотницкий, Э. П. Чернышев. – 2-е изд. – СПб.: Питер, 2007. – 300с.
12. Шебес М. Р. Задачник по теории электрических цепей: учебное пособие для электротехнических, радиотехнических специальностей вузов / М.Р. Шебес, М.В. Каблукова. – 4-е изд., перераб. и доп. – М.: Высшая школа, 1990. – 544с.

13. Сборник задач и упражнений по теоретическим основам электротехники: учеб. пособие для вузов / под ред. проф. П. А. Ионкина. – М.: Энергоиздат, 1982. – 768с.
14. Сборник задач и упражнений по теоретическим основам электротехники: учеб. пособие для энерг. и приборостр. спец. вузов. – 4-е изд., перераб. и испр. / под ред. Л. А. Бесснова. – М.: Высш. шк., 2003. – 528с.
15. Пономаренко В. К. Пособие к практическим занятиям по теории электрических цепей: учеб. пособие – 2-е изд., перероб. и доп. – Озерск: ОТИ МИФИ, 2001. – 200с.
16. Методичні вказівки до виконання практичних робіт з дисципліни «Теорія електричних і магнітних кіл» на тему «Розрахунок лінійних електричних кіл змінного струму» / укладач А. В. Булашенко. – Суми: Вид-во СумДУ, 2011. – 132с.
17. Теорія електричних та магнітних кіл: конспект лекцій п'яти частинах. - Частина 1: Лінійні електричні кола постійного та змінного струмів / Укладач А. В. Булашенко. – Суми: Вид-во СумДУ, 2010. – 183с.
18. Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы: учебник для вузов. – 4-е изд., переаб и доп. – М.: Радио и связь, 1986. – 512.
19. Баскаков С. И. Радиотехнические цепи и сигналы. Руководство к решению задач. – М.: Высшая школа, 2002. – 214с.
20. Теорія електричних та магнітних кіл: конспект лекцій. Розділ «Перехідні процеси у лінійних електричних колах із зосередженими параметрами» / укладач А. В. Булашенко. – Суми : Сумський державний університет, 2012. – 232 с.
21. Булашенко А.В. Побудова векторних діаграм за допомогою математичного пакету MathCAD / А.В. Булашенко // Науково-методична конференція викладачів, співробітників і студентів : тези доповідей, 27 квітня 2010 року / Конотопський ін-т СумДУ; Відп. за вип. Н.В. Барбара, О.С. Заїка. – Суми : СумДУ, 2010. — Ч.2. — С. 10-13.
22. Кролевецький, О.В. Спосіб оцінки струму витоку / О.В. Кролевецький, І.В. Забегалов, А.В. Булашенко // Освіта, наука та виробництво: розвиток і перспективи: матеріали III Всеукраїнської науково-методичної конференції, м. Шостка, 19 квітня 2018 р. – Суми: СумДУ, 2018. – С. 165-166.
23. Булашенко, АВ Розробка віртуальних лабораторних робіт із дисципліни" Теорія електричних та магнітних кіл"[Текст]/АВ Булашенко//Науково-методична конференція викладачів, співробітників і студентів: тези доповідей, 23 квітня 2009 року/Відп. за вип. ТМ Гричановська.-Суми: СумДУ, 2009.-Ч. 1.-С. 69-70.
24. Булашенко, А.В. Навчальний посібник з ТЕМК / А.В. Булашенко // Науково-методична конференція викладачів, співробітників і студентів : тези доповідей, 27 квітня 2010 року / Конотопський ін-т СумДУ; Відп. за вип. Н.В. Барбара, О.С. Заїка. — Суми : СумДУ, 2010. — Ч.2. — С. 122-124.

ДОДАТОК А

Приклад модульної контрольної роботи
(an example of a modular control robot)

МОДУЛЬНА КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 2

на тему «**Змінний струм**»

з дисципліни «Основи теорії кіл»

Варіант № 33

Задача 1. У колі визначити напругу $e(t)$. Відомо, що $i(t) = 2\sqrt{2}\cos(\omega t - 15°)$ мА. Якісно побудувати суміщену векторну діаграму струмів та напруг кола. Числові значення елементів кола: $R = 3$ кОм, $X_L = 7$ кОм, $X_C = 4$ кОм.

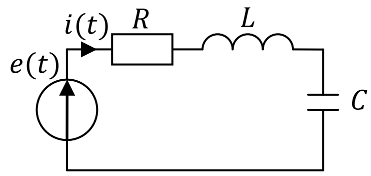


Рисунок 1

Оцінювання – **1.5 бала**

Задача 2. У пасивному двополюснику (ПД) на вході визначити напругу $u(t)$ на частоті $\omega = 0.25 \cdot 10^6$ рад/с та накреслити його паралельну схему заміщення, визначити числові значення її елементів. Визначити активну, реактивну та модуль повної потужності $|S|$. Визначити активну та реактивну складові вхідного струму. Відомо, що $i(t) = 2\cos(\omega t + 25°)$, мА. Вхідний опір на цій частоті $Z_{\text{ВХ}} = 4 - 3j$ мСім.

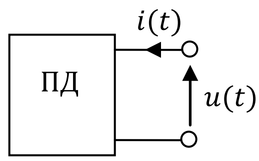


Рисунок 2

Оцінювання – **1.5 бала**

Задача 3. У колі визначити напругу джерела $e(t)$. Відомо, що: $i(t) = \sqrt{2}\cos(\omega t - 60°)$ мА. Числові значення елементів кола: $R = 5$ кОм, $X_{L1} = 2$ кОм, $X_{L2} = 2$ кОм, $X_C = 2.5$ кОм.

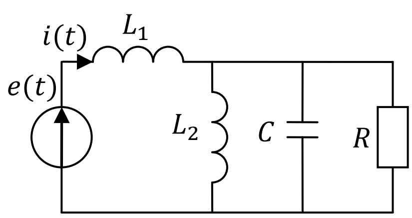


Рисунок 3

Оцінювання – **2 бали**

ДОДАТОК Б

Формули диференціювання

Правила диференціювання

Нехай задані диференційовані функції $U = u(x)$, $V = v(x)$

1. Похідна алгебраїчної суми кінцевого числа диференційованих функцій дорівнює сумі похідних цих функцій
$$\frac{d}{dx}[U \pm V] = \frac{d}{dx}[U] \pm \frac{d}{dx}[V]$$
2. Похідна добутку двох диференційованих функцій дорівнює сумі добутку похідної першого співмножника на другий та добутку похідної другого співмножника на перший:
$$\frac{d}{dx}[U \cdot V] = \frac{d}{dx}[U] \cdot V + \frac{d}{dx}[V] \cdot U$$
3. Похідна частки визначається виразом
$$\frac{d}{dx}\left[\frac{U}{V}\right] = \frac{\frac{d}{dx}[U] \cdot V - \frac{d}{dx}[V] \cdot U}{V^{\,2}}$$

Таблиця похідних деяких функцій

Функція	Похідна функції	Функція	Похідна функції
$\sin x$	$\cos x$	x^c	cx^{c-1}
$\cos x$	$-\sin x$	$\|x\|$	$\operatorname{sign} x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\operatorname{ctg} x$	$\frac{-1}{\sin^2 x}$	$\frac{1}{x^c}$	$-\frac{c}{x^{c+1}}$
e^x	e^x	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
$\log_a x$	$\frac{\log_a e}{x}$	c^x	$c^x \ln c$
$\operatorname{arsin} x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arcctg} x$	$\frac{-1}{1+x^2}$
$\operatorname{arcsec} x$	$\frac{1}{\|x\|\sqrt{x^2-1}}$	$\arccos x$	$\frac{-1}{\|x\|\sqrt{x^2-1}}$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$

Формула інтегрування частинами
$$\int u(\tau)dv(\tau) = u(\tau)v(\tau)|_0^t - \int v(\tau)du(\tau).$$

ДОДАТОК В
Тригонометричні формули

1. Формули додавання аргументів

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y\,;$$
$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \pm \sin x \sin y\,;$$
$$tg(x \pm y) = \frac{tgx \pm tgy}{1 \mp \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y};$$
$$ctg(x \pm y) = \frac{\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y \mp 1}{\operatorname{ctg} y \pm \operatorname{ctg} x}.$$

2. Формули Ейлера

$$\sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}; \qquad \cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2};$$
$$e^{jx} = \cos x + j \sin x\,; \qquad e^{-jx} = \cos x - j \sin x.$$

3. Деякі значення тригонометричних функцій

Кут x	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$
0	0	1	0	-
$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1	1
$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$
$\pi/2$	1	0	-	0
$2\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$-1/2$	$-\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$
$3\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	-1	-1
$5\pi/6$	$1/2$	$-\sqrt{3}/2$	$-1/\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$
π	0	-1	0	-
2π	0	1	0	-

4. Формули зведення

Аргумент β	Тригонометричні функції			
	$\sin\beta$	$\cos\beta$	$\operatorname{t}g\,\beta$	$\operatorname{ct}g\,\beta$
$\alpha + \pi/2$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\operatorname{ct}g\,\alpha$	$-\operatorname{t}g\,\alpha$
$\alpha + \pi$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\operatorname{t}g\,\alpha$	$\operatorname{ct}g\,\alpha$
$\alpha + 3\pi/2$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\operatorname{ct}g\,\alpha$	$-\operatorname{t}g\,\alpha$
$\alpha + 2\pi$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{t}g\,\alpha$	$\operatorname{ct}g\,\alpha$
$-\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-\operatorname{t}g\,\alpha$	$-\operatorname{ct}g\,\alpha$
$-\alpha + \pi/2$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$\operatorname{ct}g\,\alpha$	$\operatorname{t}g\,\alpha$
$-\alpha + \pi$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\operatorname{t}g\,\alpha$	$-\operatorname{ct}g\,\alpha$
$-\alpha + 3\pi/2$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\operatorname{ct}g\,\alpha$	$\operatorname{t}g\,\alpha$
$-\alpha + 2\pi$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-\operatorname{t}g\,\alpha$	$-\operatorname{ct}g\,\alpha$